Azzolini Riccardo 2020-02-20

Probabilità uniforme su spazi finiti

1 Probabilità uniforme su uno spazo finito

Sia Ω finito, cioè $\#\,\Omega < \infty$. Si definisce allora lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, con:

- $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$
- **probabilità uniforme**: $P(\{\omega\}) = p \quad \forall \omega \in \Omega$

Dato che gli eventi del tipo $\{\omega\}$ sono disgiunti per ω diversi,

$$\{\omega_i\} \cap \{\omega_j\} = \varnothing \quad \forall \omega_i, \omega_j \in \Omega,\ \omega_i \neq \omega_j$$

la probabilità dello spazio totale è

$$P(\Omega) = P\left(\bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}\right) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} p = \#\,\Omega \cdot p$$

ma siccome, per definizione, essa deve valere 1, si ricava che

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= 1 \\ \#\,\Omega \cdot p &= 1 \\ p &= \frac{1}{\#\,\Omega} \end{aligned}$$

e, di conseguenza, la probabilità di un evento $A \in \mathscr{A}$ è data da

$$P(A) = P\left(\bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}\right) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} p = \#\,A \cdot p = \frac{\#\,A}{\#\,\Omega}$$

ovvero dal rapporto tra il numero di casi favorevoli e il numero di casi possibili, che, infatti, è il modello usato, anche a livello intuitivo, per i problemi di questo tipo.

2 Esempi di spazi campionari e di eventi

2.1 Lanci di una moneta

Si effettuano due lanci consecutivi di una moneta.

1. Quale spazio campionario Ω si può proporre?
2. Scrivere, in termini di sottoinsiemi di Ω, l'evento "esce una sola volta *testa*".
3. Scrivere, in termini di sottoinsiemi di Ω, l'evento "esce la prima volta *testa*".

Soluzione:

1. Si può scegliere:

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1, \omega_2 \in \{T, C\}\} = \{(T,T), (T,C), (C,T), (C,C)\}$$

   Attenzione: Se, invece, si adottasse

$$\Omega = \{\{\omega_1, \omega_2\} \mid \omega_1, \omega_2 \in \{T, C\}\} = \{\{T,T\}, \{T,C\}, \{C,C\}\} = \{\{T\}, \{T,C\}, \{C\}\}$$

   non verrebbe rappresentato l'ordine dei due lanci, e, quindi, non sarebbe possibile esprimere l'evento "esce la prima volta T".[1]

2. $A =$ "esce una sola volta T" $= \{(T,C), (C,T)\}$
   Siccome si può assumere probabilità uniforme su Ω, e date $\#\,\Omega = 4$ e $\#\,A = 2$, la probabilità di A è

$$P(A) = \frac{\#\,A}{\#\,\Omega} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

3. $B =$ "esce la prima volta T" $= \{(T,T), (T,C)\}$

$$P(B) = \frac{\#\,B}{\#\,\Omega} = \frac{1}{2}$$

2.2 Spazi campionari per un mazzo di carte

Si estrae una carta a caso da un mazzo di 52 carte. Proporre uno spazio campione quando:

1. i semi non sono considerati (cioè le carte che differiscono solo per il seme si considerano equivalenti, evitando quindi di formulare eventi del tipo "esce un fante di cuori");
2. i semi sono considerati.

Soluzione:

1. $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 10, 11, 12, 13\}$
   (dove 11 indica il jack, 12 la donna, e 13 il re).
2. $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 \in \{1, 2, \ldots, 13\},\ \omega_2 \in \{C, Q, F, P\}\}$

[1] In generale, uno spazio campionario non può essere adeguato per un determinato problema se non permette di esprimere un evento a cui si è interessati.

2.3 Estrazione di carte da un mazzo

Si estrae una carta a caso da un mazzo di 52 carte. Siano dati gli eventi:

$$\begin{aligned} A &= \text{“è uscito un re”} \\ B &= \text{“è uscita una carta di picche”} \end{aligned}$$

Scrivere:

- $A \cup B$
- $A \cap B$
- $A \cup B^c$

Soluzione:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \text{“è uscito un re, oppure una carta di picche”} \\ &= (A \cap B^c) \cup B \qquad \textit{(per calcolare l'unione escludendo subito i duplicati)} \\ &= \text{“è uscito un re non di picche”} \cup \text{“è uscita una carta di picche”} \\ &= \{(13, C), (13, Q), (13, F), (1, P), (2, P), \dots, (13, P)\} \end{aligned}$$

$$A \cap B = \text{“è uscito un re di picche”} = \{(13, P)\}$$

$$\begin{aligned} A \cup B^c &= \text{“è uscito un re, oppure una carta non di picche”} \\ &= (A \cap (B^c)^c) \cup B^c = (A \cap B) \cup B^c \\ &= \text{“è uscito un re di picche”} \cup \text{“è uscita una carta non di picche”} \\ &= \{(13, P), (1, C), \dots, (13, C), (1, Q), \dots, (13, Q), (1, F), \dots, (13, F)\} \end{aligned}$$

$$P(A \cup B^c) = \overbrace{\frac{1}{52}}^{\text{re di picche}} + \underbrace{1 - \frac{1}{4}}_{\text{carta non di picche}} = \frac{1 + 52 - 13}{52} = \frac{40}{52} = \frac{10}{13}$$