Azzolini Riccardo 2018-12-04

Prodotto scalare e basi ortogonali e ortonormali

1 Prodotto scalare

Il **prodotto scalare** tra vettori di $\mathbb{R}^n$ è un'operazione tra due vettori che restituisce uno scalare:

$$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Se $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $v = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, allora:

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

1.1 Esempio

$$u = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3 \qquad v = (2, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} u \cdot v &= \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot y_i \\ &= x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 \\ &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

2 Norma

La **norma** (o **modulo**) di un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ è lo scalare $\sqrt{v \cdot v}$ e si indica con $\|v\|$.

Geometricamente, $\|v\|$ è la lunghezza del vettore v.

Il vettore $\frac{v}{\|v\|}$ è un vettore con norma 1 nella stessa direzione di v.

2.1 Esempi

$$v = (1, 0)$$
$$v \cdot v = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$$
$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{1} = 1$$

$$u = (1, 1)$$
$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1} = \sqrt{2}$$

3 Vettori ortogonali

In generale, vale la proprietà

$$u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \hat{uv}$$

dove $\hat{uv}$ è l'angolo tra u e v.

In particolare, se u e v sono **ortogonali** (perpendicolari), allora

$$\hat{uv} = \frac{\pi}{2} \implies \cos \hat{uv} = 0$$

Di conseguenza, u e v sono ortogonali se e solo se $u \cdot v = 0$.

4 Basi ortogonali e ortonormali

Una base è **ortogonale** se tutti i vettori che la compongono sono ortogonali tra di loro.

Una base è **ortonormale** se è ortogonale e tutti i suoi vettori hanno norma uguale a 1.

4.1 Esempi

La base canonica di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale:

$$E = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$$

$$(1,0,0)\cdot(0,1,0) = 0$$
$$(1,0,0)\cdot(0,0,1) = 0$$
$$(0,1,0)\cdot(0,0,1) = 0$$

$$\|(1,0,0)\| = 1$$
$$\|(0,1,0)\| = 1$$
$$\|(0,0,1)\| = 1$$

La base $B = \left\{(1,2),\left(1,-\frac{1}{2}\right)\right\}$ di $\mathbb{R}^2$ è ortogonale, ma non ortonormale:

$$(1,2)\cdot\left(1,-\frac{1}{2}\right) = 1\cdot 1 + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 1-1 = 0$$

$$\|(1,2)\| = \sqrt{1\cdot 1 + 2\cdot 2} = \sqrt{5} \neq 1$$
$$\left\|\left(1,-\frac{1}{2}\right)\right\| = \sqrt{1\cdot 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{5}}{2} \neq 1$$

A partire dalla base ortogonale B, è possibile costruirne una ortonormale dividendo ciascun vettore per la sua norma:

$$B_1 = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\left(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\}$$