Azzolini Riccardo 2019-03-20

Serie numeriche

1 Serie

Sia $\{a_n\}$ una successione. Allora

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

è una *somma formale* (perché potrebbe non avere un risultato, neanche infinito) e si dice **serie** (**numerica**) di **termine generale** a_k.

2 Successione delle somme parziali

Sia $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ una serie. La successione $\{s_n\}$, definita come

$$\begin{aligned}
s_0 &= a_0 \\
s_1 &= a_0 + a_1 \\
s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\
&\vdots \\
s_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k
\end{aligned}$$

si chiama **successione delle somme parziali** della serie.

3 Serie convergenti, divergenti e indeterminate

Siano $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ una serie e $\{s_n\}$ la sua successione delle somme parziali.

- Se $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = S \in \mathbb{R}$, la serie **converge** e ha S come **somma**.
- Se $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$ $(-\infty)$, la serie **diverge** e la sua somma è $+\infty$ $(-\infty)$.

- Se $\nexists \lim_{n \to +\infty} s_n$, la serie si dice **indeterminata** o **irregolare**.

Osservazione: Il comportamento di una serie *non dipende* dal valore iniziale di k, ma esso influenza la somma se la serie converge.

4 Condizione necessaria per la convergenza di una serie

Teorema: Se una serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge, allora

$$\lim_{k \to +\infty} a_k = 0$$

Questo teorema è utile nel verso opposto: se il termine generale non tende a 0, la serie non converge.

Dimostrazione: Per ipotesi, la serie converge. In altre parole, se $\{s_n\}$ è la sua successione delle somme parziali,

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = S \in \mathbb{R}$$

La differenza tra gli ultimi due termini di $\{s_n\}$ è

$$s_n - s_{n-1} = (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n) - (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}) = a_n$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} a_n &= \lim_{n \to +\infty} (s_n - s_{n-1}) \\
&= \lim_{n \to +\infty} s_n - \lim_{n \to +\infty} s_{n-1} \\
&= S - S \\
&= 0 \qquad \square
\end{aligned}$$

4.1 Viceversa

Osservazione: Il viceversa non è vero. Esistono infatti serie con $a_k \to 0$ ma che non convergono. Un esempio è

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 0$$

dato che

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &= n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &= \sqrt{n} \end{aligned}$$

e quindi, per il teorema del confronto,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \implies \lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$$

cioè la serie diverge.

5 Serie armonica generalizzata

La serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R},\, \alpha > 0$$

è chiamata **serie armonica generalizzata**, e

- converge per $\alpha > 1$;
- diverge a $+\infty$ per $0 < \alpha \leq 1$.

Nel caso particolare $\alpha = 1$, la serie si chiama semplicemente **serie armonica**.

6 Serie di Mengoli

La **serie di Mengoli**,

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)}$$

converge, e la sua somma è 1.

Dimostrazione: Il termine generale si può riscrivere separando i due fattori del denominatore:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k(k-1)} &= \frac{A}{k} + \frac{B}{k-1} \\
&= \frac{A(k-1)+Bk}{k(k-1)} \\
&= \frac{Ak-A+Bk}{k(k-1)} \\
&= \frac{(A+B)k-A}{k(k-1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A=1 \end{cases} \implies \begin{cases} A=-1 \\ B=\ \ 1 \end{cases}$$

Quindi

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

e allora

$$\begin{aligned}
s_n &= a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\
&= \underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{a_2} + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}_{a_3} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}_{a_4} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}}_{a_{n-1}} + \underbrace{\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}}_{a_n} \\
&= 1 - \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

perciò il limite della successione delle somme parziali è

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1 \qquad \square$$