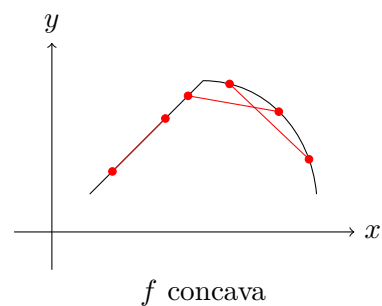
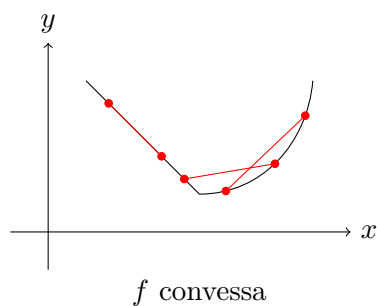


funzioni convesse e concave

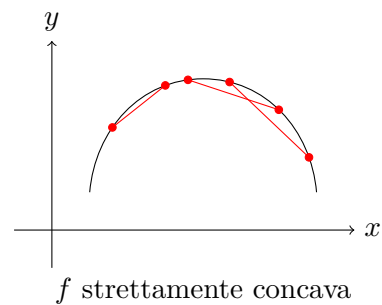
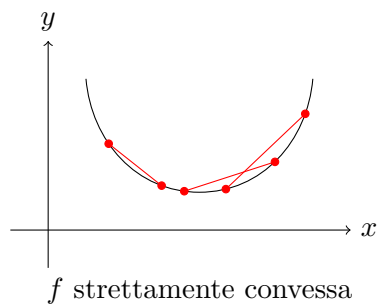
1 Funzioni convesse e concave

Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, con I intervallo. Se $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, il segmento di estremi $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$

- è *non al di sotto (non al di sopra)* del grafico di $y = f(x)$, allora f è **convessa (concava)**;



- è *al di sopra (al di sotto)* del grafico di $y = f(x)$, esclusi gli estremi $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, allora f è **strettamente convessa (strettamente concava)**.

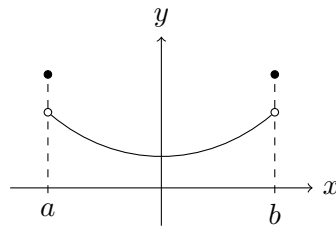


Osservazione: Se f è (strettamente) convessa, $-f$ è (strettamente) concava, e viceversa.

2 Affermazioni sulle funzioni convesse e concave

Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (strettamente) convessa in (a, b) . Allora:

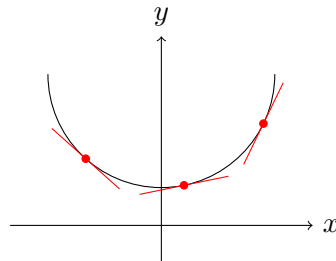
- $\forall x \in (a, b) \quad \exists f'_-(x), f'_+(x)$
- $f'_+(x) \geq f'_-(x) \quad \forall x \in (a, b)$
- f è continua in (a, b) , ma non necessariamente agli estremi. Ad esempio:



Se, inoltre, f è derivabile in (a, b) , le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- f è (strettamente) convessa in (a, b) ;
- f' è (strettamente) crescente in (a, b) ;
- le rette tangenti a $y = f(x)$ sono non al di sopra (sono al di sotto) del grafico, cioè

$$\forall x, x_0 \in (a, b), x \neq x_0 \quad f(x) \underset{(>)}{\geq} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



Per le funzioni (strettamente) concave valgono affermazioni analoghe.

3 Derivata seconda e convessità

Teorema: Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (con I intervallo) derivabile due volte in I . Allora

- $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$ se e solo se f è *convessa* in I ;
- $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$ se e solo se f è *concava* in I .

Inoltre,

- se $f''(x) > 0 \quad \forall x \in I$, allora f è *strettamente convessa* in I ;
- se $f''(x) < 0 \quad \forall x \in I$, allora f è *strettamente concava* in I ;

ma non viceversa. Ad esempio, $f(x) = x^4$ è strettamente convessa nel suo dominio \mathbb{R} , ma

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 \\ f''(x) &= 12x^2 \geq 0, \quad f''(0) = 0 \end{aligned}$$

4 Punto di flesso

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in X$ un punto interno. Se esiste la retta tangente del grafico di $y = f(x)$ in x_0 , ed $\exists U(x_0)$ tale che

- f è concava in $U(x_0) \cap (x_0, +\infty)$
- f è convessa in $U(x_0) \cap (-\infty, x_0)$

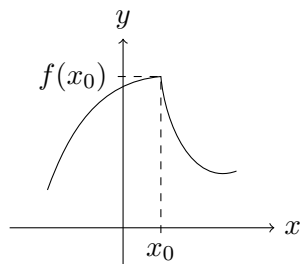
o viceversa, il punto $(x_0, f(x_0))$ si dice **punto di flesso**.

In x_0 , o f è derivabile (una volta), oppure il grafico ha una retta tangente verticale, cioè

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$$

e allora si dice che $(x_0, f(x_0))$ è un **punto di flesso a tangente verticale**.

Invece, un punto in cui non esiste la retta tangente *non* è un punto di flesso, anche se f “cambia convessità” il tale punto. Ad esempio, nel seguente grafico, $(x_0, f(x_0))$ è un punto angoloso, e perciò non di flesso:



4.1 Derivata seconda nei punti di flesso

Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile due volte in x_0 , un punto interno di X , e se ha un punto di flesso in x_0 , allora $f''(x_0) = 0$.

Osservazioni:

- f può non essere derivabile due volte in un punto di flesso.
- $f''(x_0) = 0$ è una condizione necessaria, ma non sufficiente, per avere un punto di flesso in x_0 . Ad esempio, per $f(x) = x^4$,

$$f''(x) = 12x^2 \geq 0, \quad f''(0) = 0$$

ma $x_0 = 0$ è un punto di minimo (assoluto), non di flesso.