Azzolini Riccardo 2019-04-16

Polinomio di Taylor

1 Approssimazioni di una funzione

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in (a, b)$. Allora:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) &\iff \lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \\
&\iff f(x) - f(x_0) = o(1) \quad \text{per } x \to x_0 \\
&\iff f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{T_0(x)} + o(1) \quad \text{per } x \to x_0
\end{aligned}$$

$T_0(x) = f(x_0)$ è quindi un polinomio di grado 0 che approssima f per $x \to x_0$ e, in particolare, assume il valore esatto della funzione in $x = x_0$: $T_0(x_0) = f(x_0)$.

Supponendo che f sia anche derivabile in x_0, si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \\
\iff &\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right] = 0 \\
\iff &\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \\
\iff &\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = o(1) \quad \text{per } x \to x_0 \\
\iff &f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(1)(x - x_0) = o(x - x_0) \quad \text{per } x \to x_0 \\
\iff &f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{T_1(x)} + o(x - x_0) \quad \text{per } x \to x_0
\end{aligned}$$

Il polinomio di grado 1 $T_1(x)$ approssima f per $x \to x_0$. In particolare:

- $T_1(x_0) = T_0(x_0) = f(x_0)$;
- $T_1'(x_0) = f'(x_0)$.

2 Polinomio di Taylor

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in $x_0 \in (a, b)$. Il polinomio di grado $\leq n$[1]

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \end{aligned}$$

è il **polinomio di Taylor di ordine *n*** della funzione f, **centrato in x_0**, che si può indicare anche con $T_n(f, x_0)$. Nel caso in cui $x_0 = 0$, esso è anche detto **polinomio di MacLaurin**.

Inoltre, si dimostra che, se si ha un polinomio

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + a_4(x - x_0)^4 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

tale che

$$\begin{aligned} T_n(x_0) &= f(x_0) && (0) \\ T_n'(x_0) &= f'(x_0) && (1) \\ T_n''(x_0) &= f''(x_0) && (2) \\ T_n'''(x_0) &= f'''(x_0) && (3) \\ &\vdots \\ T_n^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0) && (n) \end{aligned}$$

allora segue che $T_n(x)$ è il polinomio di Taylor di ordine n centrato in x_0.

Dimostrazione: Siccome, in $x = x_0$, tutti i termini del polinomio contenenti $(x - x_0)^k$ diventano 0, si ha:

$$T_n(x_0) = a_0 \overset{(0)}{\Longrightarrow} a_0 = f(x_0)$$

La derivata prima del polinomio è

[1] Il grado è minore di n se $f^{(n)}(x_0) = 0$.

$$T_n'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + 4a_4(x - x_0)^3 + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

e, di conseguenza:

$$T_n'(x_0) = a_1 \overset{(1)}{\Longrightarrow} a_1 = f'(x_0)$$

Analogamente per la derivata seconda,

$$T_n''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x - x_0) + 3 \cdot 4a_4(x - x_0)^2 + \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}$$
$$T_n''(x_0) = 2a_2 \overset{(2)}{\Longrightarrow} a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$$

per la terza,

$$T_n'''(x) = 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4(x - x_0) + \cdots + n(n-1)(n-2)a_n(x - x_0)^{n-3}$$
$$T_n'''(x_0) = 2 \cdot 3a_3 \overset{(3)}{\Longrightarrow} a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}$$

e così via, fino alla derivata n-esima:

$$T_n^{(n)}(x_0) = n!a_n \overset{(n)}{\Longrightarrow} a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \qquad \square$$

3 Teorema di Peano

Siano $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$. Se f è derivabile n volte in x_0, l'unico polinomio $p(x)$ di grado $\leq n$ tale che

$$f(x) = p(x) + o((x - x_0)^n) \quad \text{per } x \to x_0$$

(cioè che approssima "molto bene" f per x vicini a x_0) è il polinomio di Taylor $T_n(x)$ centrato in x_0.

Inoltre, $T_n(x)$ è anche l'unico polinomio di grado $\leq n$ tale che

$$
\begin{aligned}
T_n(x_0) &= f(x_0) \\
T_n'(x_0) &= f'(x_0) \\
&\vdots \\
T_n^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0)
\end{aligned}
$$

4 Polinomi di MacLaurin di alcune funzioni

- $f(x) = e^x, \quad x_0 = 0$

$$
\begin{aligned}
& & f(0) &= e^0 = 1 \\
f'(x) &= e^x \implies & f'(0) &= e^0 = 1 \\
&\vdots & &\vdots \\
f^{(n)}(x) &= e^x \implies & f^{(n)}(0) &= e^0 = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_n(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \\
&\implies e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \quad \text{per } x \to 0
\end{aligned}
$$

- $f(x) = \log(1 + x), \quad x_0 = 0$

$$
\begin{aligned}
& & f(0) &= \log 1 = 0 \\
f'(x) &= \frac{1}{1+x} &\implies \quad f'(0) &= \frac{1}{1} = 1 \\
f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} &\implies \quad f''(0) &= -\frac{1}{1} = -1 \\
f'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} &\implies \quad f'''(0) &= \frac{2}{1} = 2 \\
f''''(x) &= -\frac{2 \cdot 3}{(1+x)^4} &\implies \quad f''''(0) &= -\frac{2 \cdot 3}{1} = -3! \\
&\vdots & &\vdots \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} &\implies \quad f^{(n)}(0) &= (-1)^{n-1}(n-1)!
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_n(x) &= 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3!} - \frac{3!x^4}{4!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!x^n}{n!} \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}
\end{aligned}
$$

$$
\implies \log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n) \quad \text{per } x \to 0
$$

- $f(x) = \sin x, \quad x_0 = 0$

$$
\begin{array}{rcl}
 & & f(0) = \sin 0 = 0 \\
f'(x) = \cos x & \implies & f'(0) = \cos 0 = 1 \\
f''(x) = -\sin x & \implies & f''(0) = -\sin 0 = 0 \\
f'''(x) = -\cos x & \implies & f'''(0) = -\cos 0 = -1 \\
f''''(x) = \sin x & \implies & f''''(0) = \sin 0 = 0 \\
\vdots & & \vdots \\
f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x & \implies & f^{(2n)}(0) = (-1)^n \sin 0 = 0 \\
f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x & \implies & f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \cos 0 = (-1)^n
\end{array}
$$

$$
T_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}
$$

$$
\implies \sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underbrace{o(x^{2n+1})}_{\substack{\text{anche } o(x^{2n+2}) \\ \text{perché } T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x)}} \quad \text{per } x \to 0
$$

- $f(x) = \cos x, \quad x_0 = 0$

$$
\begin{aligned}
& & f(0) &= \cos 0 = 1 \\
f'(x) &= -\sin x & \implies\quad f'(0) &= -\sin 0 = 0 \\
f''(x) &= -\cos x & \implies\quad f''(0) &= -\cos 0 = -1 \\
f'''(x) &= \sin x & \implies\quad f'''(0) &= \sin 0 = 0 \\
f''''(x) &= \cos x & \implies\quad f''''(0) &= \cos 0 = 1 \\
&\vdots & &\vdots \\
f^{(2n)}(x) &= (-1)^n \cos x & \implies\quad f^{(2n)}(0) &= (-1)^n \cos 0 = (-1)^n \\
f^{(2n+1)}(x) &= (-1)^{n+1} \sin x & \implies\quad f^{(2n+1)}(0) &= (-1)^{n+1} \sin 0 = 0
\end{aligned}
$$

$$
T_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}
$$

$$
\implies \cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underbrace{o(x^{2n})}_{\substack{\text{anche } o(x^{2n+1}) \\ \text{perché } T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x)}} \quad \text{per } x \to 0
$$

Osservazione: Il polinomio di Taylor di $\sin x$ ha solo termini dispari perché il seno è una funzione dispari. Analogamente, il polinomio di $\cos x$ ha solo termini pari perché il coseno è una funzione pari.