Azzolini Riccardo 2019-02-20

Notazioni asintotiche

1 O grande

Una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ si dice **O grande** di una funzione $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, scritto $f(n) = O(g(n))$, se esistono un intero n_0 e una costante $c > 0$ per cui

$$\forall n > n_0 \quad f(n) \leq cg(n)$$

Informalmente, f "è dominata" da g.

1.1 Esempi

- $n = O(2n)$, con $n_0 = 0$ e $c = 1$ (per esempio: si possono scegliere anche altre combinazioni di n_0 e c):

$$\forall n > 0 \quad n \leq 2n$$

- $n = O\left(\frac{n}{2}\right)$, con $n_0 = 0$ e $c = 2$:

$$\forall n > 0 \quad n \leq 2 \cdot \frac{1}{2}n$$

- $4n^2 + n = O(n^2)$, con $n_0 = 0$ e $c = 5$:

$$\begin{aligned} \forall n > 0 \quad 4n^2 + n &\leq 5n^2 \\ n &\leq n^2 \end{aligned}$$

- $n \log n \neq O(n)$:

$$\begin{aligned} \forall n > 0 \quad n \log n &\leq cn \\ \log n &\leq c \quad \textsc{falso} \end{aligned}$$

2 Omega grande

Una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ si dice **omega grande** di una funzione $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, scritto $f(n) = \Omega(g(n))$, se esistono un intero n_0 e una costante $c > 0$ per cui

$$\forall n > n_0 \quad f(n) \geq cg(n)$$

Informalmente, f "domina" g.

2.1 Esempi

- $n = \Omega(2n)$, con $n_0 = 0$ e $c = \frac{1}{2}$:

$$\forall n > 0 \quad n \geq \frac{1}{2} \cdot 2n$$

- $\forall k > 0 \quad n^{\frac{1}{k}} = \Omega(\log n)$
- $\forall k > 0 \quad (\log n)^k \neq \Omega(n)$

3 Theta grande

Una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ si dice **theta grande** di una funzione $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, scritto $f(n) = \Theta(g(n))$, se esistono un intero n_0 e due costanti $c, d > 0$ per cui

$$\forall n > n_0 \quad cg(n) \leq f(n) \leq dg(n)$$

Si dice allora che f e g hanno lo stesso ordine di grandezza.

3.1 Esempi

- $n^3 = \Theta(n^3 + 10n)$, con $c = \frac{1}{2}$, $d = 1$ e $n_0 = 4$:

$$
\begin{aligned}
\forall n > 4 \quad c(n^3 + 10n) \leq n^3 &\leq d(n^3 + 10n) \\
n^3 &\leq n^3 + 10n \\
\frac{1}{2}(n^3 + 10n) &\leq n^3 \\
\frac{1}{2}n^3 + 5n &\leq n^3 \\
5n &\leq \frac{n^3}{2} \\
10n &\leq n^3 \\
10 &\leq n^2
\end{aligned}
$$

- $n \log n + n^{\frac{3}{2}} = \Theta(n^{\frac{3}{2}})$, con $c = 1$, $d = 3$ e $n_0 = 2$: in pratica è sufficiente considerare il termine che cresce più rapidamente

4 $\sim$ e o piccolo

- $f(n)$ è **asintotica** a $g(n)$, scritto $f(n) \sim g(n)$, se

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$$

  A differenza di Θ, $\sim$ considera anche i coefficienti.

- $f(n)$ è un **o piccolo** di $g(n)$, scritto $f(n) = o(g(n))$, se

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

  cioè, informalmente, se f è "trascurabile" rispetto a g.

4.1 Esempi

- $n^2 \sim n^2 + \dfrac{n}{2}$, perché

$$\frac{n^2}{n^2 + \frac{n}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{n}{2n^2}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2n}}$$

  e $\dfrac{1}{2n}$ tende a 0 per $n \to +\infty$, quindi il rapporto tende a 1.

- $3n^2 + 7n \sim 3n^2 + \log n$
- $\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$
- $n \log n = o(n^2)$

5 Proprietà

- $f(n) = O(g(n))$ se e solo se $g(n) = \Omega(f(n))$.
- $f(n) = \Theta(g(n))$ se e solo se $f(n) = O(g(n))$ e $f(n) = \Omega(g(n))$.
- $f(n) \sim g(n)$ se e solo se $|f(n) - g(n)| = o(g(n))$.
- $f(n) \sim g(n)$ implica $f(n) = \Theta(g(n))$, ma non viceversa.
- $f(n) = o(g(n))$ implica $f(n) = O(g(n))$, ma non viceversa.
- Queste notazioni definiscono relazioni binarie sull'insieme delle funzioni $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$:
  - O e Ω sono riflessive e transitive;
  - Θ e $\sim$ sono riflessive, simmetriche e transitive, quindi definiscono delle relazioni di equivalenza (con infinite classi di equivalenza, ciascuna delle quali è a sua volta infinita).

6 Regole di calcolo

- $f(n) = O(g(n))$ implica $cf(n) = O(g(n)) \quad \forall c > 0$, cioè, informalmente, si possono trascurare le costanti moltiplicative: infatti, $O(2n^2)$ *non* è più preciso di $O(n^2)$.
- Se $f_1(n) = O(g_1(n))$ e $f_2(n) = O(g_2(n))$, allora

  $$f_1(n) + f_2(n) = O(g_1(n) + g_2(n))$$
  $$f_1(n) \cdot f_2(n) = O(g_1(n) \cdot g_2(n))$$

  ma, in generale,

  $$f_1(n) - f_2(n) \neq O(g_1(n) - g_2(n))$$

Le stesse regole valgono per Ω e Θ.