Azzolini Riccardo 2019-04-01

Continuità

1 Funzione continua

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in X$. $f(x)$ si dice **continua** in x_0 se

- x_0 è un punto isolato del dominio X, oppure
- x_0 è un punto di accumulazione per X e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Osservazioni:

- $x_0 \in X$, quindi non ha senso considerare *non* continua una funzione in $x_0 \notin X$. Di conseguenza, il grafico di una funzione continua si può disegnare "senza staccare la penna dal foglio" solo se il dominio è un singolo intervallo.

  Ad esempio, $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua nel dominio $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, e non ha senso dire che non è continua in $x_0 = 0$.

- Dire che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ implica l'esistenza di $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, e che

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

2 Funzione continua da destra o sinistra

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in X$ un punto di accumulazione destro (sinistro) per X. Allora, $f(x)$ si dice **continua da destra** (**da sinistra**) in x_0 se

$$\lim_{\substack{x \to x_0^+ \\ (x \to x_0^-)}} f(x) = f(x_0)$$

Osservazione: f è continua in $x_0 \in X$, punto di accumulazione per X, se e solo se è continua sia da destra che da sinistra in x_0.

2.1 Esempi

- $f(x) = \sqrt{x}$, che ha dominio $X = [0, +\infty)$, è continua da destra, ma non da sinistra, in $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0 = f(0) \qquad \nexists \lim_{x \to 0^-} \sqrt{x}$$

- La funzione *parte intera di x*, $f(x) = [x]$, è continua da destra, ma non da sinistra, in $x_0 = 2$:

$$\lim_{x \to 2^+} [x] = 2 = f(2) \qquad \lim_{x \to 2^-} [x] = 1 \neq f(2)$$

- La funzione *segno di x*,

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

  non è continua né da destra né da sinistra in $x_0 = 0$, perché

$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1 \neq \operatorname{sgn}(0) \qquad \lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1 \neq \operatorname{sgn}(0)$$

In generale, i polinomi, le funzioni razionali fratte, le radici, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, gli esponenziali e i logaritmi sono tutte funzioni continue (eventualmente, per alcuni punti, solo da destra/sinistra) nei rispettivi domini.

3 Funzione prolungabile con continuità

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R} \setminus X$ un punto di accumulazione per X. Se esiste ed è finito

$$\lim_{\substack{x \to x_0^+ \\ (x \to x_0^-)}} f(x) = l$$

si dice che f è **prolungabile con continuità da destra** (**da sinistra**) in $x_0 = 0$, ponendo $f(x_0) = l$.

3.1 Esempio

$$f(x) = \frac{x}{\log x}$$

è continua nel suo dominio $X = (0,1) \cup (1, +\infty)$.

- f è prolungabile con continuità da destra in 0, perché

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\log x} = 0$$

  quindi si può porre $f(0) = 0$.

- f *non* è prolungabile con continuità né da destra né da sinistra in 1, dato che

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{\log x} = -\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\log x} = +\infty$$

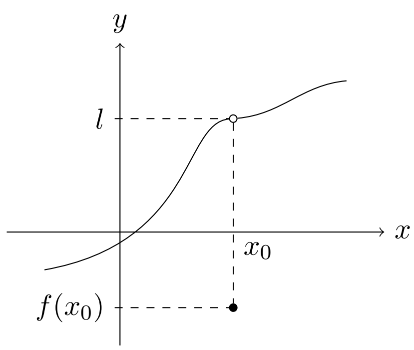
  cioè $x = 1$ è un asintoto verticale di f.

4 Permanenza del segno

Teorema: Sia $f : X \to \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in X$, con x_0 di accumulazione per X. Se $f(x_0) > 0$ ($f(x_0) < 0$), allora $\exists U(x_0)$ tale che

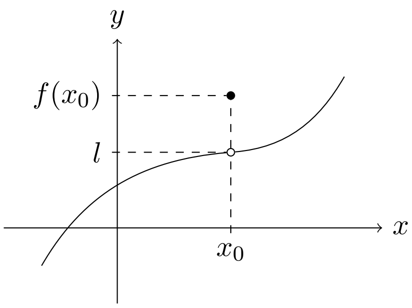
$$f(x) > 0 \ (f(x) < 0) \quad \forall x \in U(x_0) \cap X$$

Osservazione: Se f non è continua, questo non è necessariamente vero. Ad esempio:



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l > 0 \qquad f(x_0) < 0$$

Il teorema è comunque una condizione sufficiente, non necessaria, quindi esistono funzioni non continue in x_0 per cui la tesi è comunque vera, come ad esempio:



5 Composizione di funzioni continue

Siano $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ due funzioni, e siano $x_0 \in X$ e $f(X) \subseteq Y$. Se f è continua in x_0 e g è continua in $f(x_0) = y_0$, allora $g \circ f$ è continua in x_0.

5.1 Esempio

$$f(x) = \cos \frac{1}{\sqrt{x}}$$

è continua nel dominio $X = (0, +\infty)$ perché è corrisponde alla composizione di funzioni continue:

$$g(x) = \cos x \qquad h(x) = \frac{1}{x} \qquad k(x) = \sqrt{x}$$
$$f = g \circ h \circ k$$

6 Somma e differenza di funzioni continue

Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in X$ un punto di accumulazione per X. Se $f(x)$ e $g(x)$ sono entrambe continue in x_0, allora anche la loro somma/differenza $f(x) \pm g(x)$ è continua in x_0, perché

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) \pm g(x_0)$$

7 Punti di discontinuità

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in X$. Se f non è continua in x_0, quest'ultimo è un **punto di discontinuità** per f.

Osservazione: x_0 è un punto di accumulazione, perché se invece fosse un punto isolato la funzione sarebbe continua per definizione.

7.1 Discontinuità eliminabile

Se $\exists \lim_{x\to x_0} f(x)$ ed è un valore finito $l \in \mathbb{R}$, ma $l \neq f(x_0)$, allora x_0 si dice punto di discontinuità **eliminabile**.

La discontinuità può infatti essere eliminata, cambiando il valore di $f(x_0)$ e ponendolo uguale a l:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ l & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

7.2 Discontinuità di prima specie

Se $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l_- \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l_+ \in \mathbb{R}$, con $l_- \neq l_+$, x_0 si chiama punto di discontinuità di **prima specie** o di tipo **salto**, e la quantità $|l_+ - l_-|$ è il salto di $f(x)$ in x_0.

7.3 Discontinuità di seconda specie

Tutti gli altri casi di discontinuità sono chiamati discontinuità di **seconda specie**.

Di conseguenza, x_0 è un punto di discontinuità di seconda specie se almeno uno tra $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ è infinito o non esiste.

7.4 Esempi

- $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq f(0) = 0$$

quindi $x_0 = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile, e la funzione continua corrispondente è

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

- $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

quindi $x_0 = 0$ è un punto di discontinuità di prima specie, con salto $|1 - (-1)| = 2$.

- $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 = f(0)$$

quindi f è continua da sinistra, ma non da destra, in $x_0 = 0$, che è un punto di discontinuità di seconda specie.

- $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

$$\nexists \lim_{x \to 0^+} \sin \frac{1}{x}$$

$$\nexists \lim_{x \to 0^-} \sin \frac{1}{x}$$

quindi $x_0 = 0$ è un punto di discontinuità di seconda specie.