Azzolini Riccardo 2018-11-09

Algoritmo di Gauss e matrice inversa

1 Operazioni elementari tra righe

Se $R_1, R_2, ..., R_n$ sono le righe di una matrice, si dicono **operazioni elementari** su di esse:

- lo **scambio** di due righe: $R_i \leftrightarrow R_j$
- la **moltiplicazione** di una riga per uno scalare $\alpha \neq 0$: $R_i \to \alpha R_i$
- la **somma** di una riga con un'altra moltiplicata per uno scalare $\alpha \neq 0$: $R_i \to R_i + \alpha R_j$

1.1 Esempio

$$
\begin{aligned}
A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad & R_1 \leftrightarrow R_2 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
& R_1 \to 2R_1 & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
& R_2 \to R_2 + R_1 & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

2 Matrici equivalenti

Se la matrice B si ottiene da A tramite operazioni elementari, allora si dice che A e B sono **equivalenti**.

Due matrici equivalenti hanno lo *stesso rango*.

3 Matrice triangolare superiore

Una matrice quadrata $A = (a_{ij})$ è **triangolare superiore** se $a_{ij} = 0$ per ogni $i > j$.

Il determinante di una matrice triangolare è pari al prodotto degli elementi sulla diagonale.

3.1 Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 3 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 1$$

4 Matrice in forma a gradini

Una matrice di dimensioni qualsiasi è in **forma a gradini** se:

- tutte le righe nulle sono alla fine
- il primo elemento non nullo di ogni riga ha sotto solo degli zeri

Una matrice triangolare superiore è anche in forma a gradini.

In una matrice a gradini, il rango è uguale al *numero di righe non nulle*.

4.1 Esempi

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ è in forma a gradini (e anche triangolare):
  - non ci sono righe nulle
  - nella prima riga, il primo elemento non nullo e 1 e sotto ci sono solo 0
  - nella seconda riga, il primo elemento non nulle è 1 e sotto c'è 0
- $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ è in forma a gradini.

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *non* è in forma a gradini.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *non* è in forma a gradini.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ è in forma a gradini.

5 Algoritmo di Gauss per il calcolo del rango

Data una qualsiasi matrice $A \in M_{n,m}$, è sempre possibile trasformare A in forma a gradini usando le operazioni elementari. Questa trasformazione consente di calcolare facilmente il rango di A: è sufficiente contare le righe non nulle nella sua matrice a gradini equivalente.

5.1 Esempio 1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} R_2 &\to R_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} R_1 \qquad && (4,1) \to (4,1) - \frac{4}{2}(2,-3) = (4,1) - (4,-6) = (0,7) \\ R_3 &\to R_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} R_1 \qquad && (1,1) \to (1,1) - \frac{1}{2}(2,-3) = (1,1) - \left(1, -\frac{3}{2}\right) = \left(0, \frac{5}{2}\right) \end{aligned}$$

$$A \to \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 7 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 - \frac{a_{32}}{a_{22}} R_1 \qquad \left(0, \frac{5}{2}\right) \to \left(0, \frac{5}{2}\right) - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{7}(0,7) = \left(0, \frac{5}{2}\right) - \left(0, \frac{5}{2}\right) = (0,0)$$

$$A \to \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 7 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice a gradini ottenuta ha 2 righe non nulle, quindi il rango di A è 2.

5.2 Esempio 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
R_2 \leftrightarrow R_3 \qquad & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & -8 \end{pmatrix} \\
R_3 \to R_3 - 2R_1 \qquad & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -7 & -14 \end{pmatrix} \\
R_3 \to R_3 + 7R_2 \qquad & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\operatorname{rg} A = 2$$

6 Trasposta di una matrice

Data una matrice $A = (a_{ij})$, la sua **trasposta** è la matrice $A^T = (a_{ji})$. Se $A \in M_{n,m}$, cioè A è una matrice $n \times m$, allora $A^T \in M_{m,n}$, cioè la sua trasposta è una matrice $m \times n$.

In altre parole, le righe di A diventano le colonne di A^T, e le colonne di A diventano righe di A^T.

Proprietà:

- $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^T$
- se A è una matrice quadrata, $\det A = \det A^T$

6.1 Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

7 Inversa di una matrice

Se A è una matrice quadrata con $\det A \neq 0$, allora è **invertibile**, cioè esiste A^{-1} tale che $A \cdot A^{-1} = I_n$.

La matrice inversa di A si calcola a partire dalla trasposta A^T:

$$A^{-1} = \left(\frac{(-1)^{j+i} \det A^T_{ji}}{\det A} \right)$$

dove $\det A^T_{ji}$ è il minore complementare di a_{ji}.

In alternativa, è possibile costruire prima la matrice $\overline{A}$ dei complementi algebrici di A

$$\overline{A} = ((-1)^{i+j} \det A_{ij})$$

poi ricavarne la trasposta e dividere ogni suo elemento per $\det A$:

$$A^{-1} = \frac{\overline{A}^T}{\det A}$$

7.1 Esempio 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det A = 2$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{2} & -\frac{2}{2} \\ -\frac{0}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Verifica che $A \cdot A^{-1} = I_2$:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

7.2 Esempio 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det A = 4 - 2 + 0 + 6 - 0 - 12 = -4$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{-4} & -\dfrac{4}{-4} & \dfrac{-4}{-4} \\ -\dfrac{7}{-4} & \dfrac{5}{-4} & -\dfrac{-8}{-4} \\ \dfrac{2}{-4} & -\dfrac{2}{-4} & \dfrac{-4}{-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ \dfrac{7}{4} & -\dfrac{5}{4} & -2 \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Verifica che $A \cdot A^{-1} = I_3$:

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ \dfrac{7}{4} & -\dfrac{5}{4} & -2 \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 + \dfrac{7}{2} - \dfrac{3}{2} & 1 - \dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{2} & 1 - 4 + 3 \\ -3 + \dfrac{7}{2} - \dfrac{1}{2} & 3 - \dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{2} & 3 - 4 + 1 \\ 1 + 0 - 1 & -1 + 0 + 1 & -1 + 0 + 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{-2 + 7 - 3}{2} & \dfrac{2 - 5 + 3}{2} & 0 \\ \dfrac{-6 + 7 - 1}{2} & \dfrac{6 - 5 + 1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \end{aligned}$$