Azzolini Riccardo 2019-04-08

Derivate

1 Derivata sinistra e destra

Siano $f : X \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$.

- Se esiste finito

  $$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0)$$

  f si dice **derivabile da sinistra** in x_0 e $f'_-(x_0)$ si chiama **derivata sinistra** di f in x_0.

- Se esiste finito

  $$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0)$$

  f si dice **derivabile da destra** in x_0 e $f'_+(x_0)$ si chiama **derivata destra** di f in x_0.

Osservazioni:

- Una funzione è derivabile in x_0 se e solo se è derivabile sia da destra che da sinistra in x_0 e $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.
- $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$ sono, rispettivamente, i coefficienti angolari delle rette tangenti sinistra e destra in x_0.

2 Derivata di un prodotto

Teorema: Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in x_0, un punto interno[1] a X. Allora, $f \cdot g$ è una funzione derivabile in x_0 e

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \Bigg[\underbrace{f(x)}_{\substack{\to f(x_0) \\ \text{f continua}}} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Bigg] \\
&= f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0) \qquad \square
\end{aligned}$$

3 Derivata di un quoziente

Teorema: Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in x_0, un punto interno di X. Allora, $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0, e si ha

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Dimostrazione:

[1] Supporre che x_0 sia un punto interno serve a enunciare e dimostrare la regola nel caso più comune, cioè quando la funzione è derivabile sia da sinistra che da destra. Se, invece, x_0 è un estremo di X, allora esiste solo la derivata sinistra o destra, ma si possono comunque applicare le stesse regole di derivazione.

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x-x_0)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x-x_0)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \left[\frac{g(x_0)}{\underbrace{g(x)}_{\to g(x_0)}g(x_0)} \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \frac{f(x_0)}{\underbrace{g(x)}_{\to g(x_0)}g(x_0)} \cdot \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right] \\
&= \frac{g(x_0)}{[g(x_0)]^2}f'(x_0) - \frac{f(x_0)}{[g(x_0)]^2}g'(x_0) \\
&= \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2} \qquad \square
\end{aligned}
$$

4 Derivata di una funzione composta

Teorema: Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto interno a X. Se $g(X) \subseteq X$, g è derivabile in x_0, e f è derivabile in $g(x_0)$, allora $f \circ g$ è derivabile in x_0 e

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

Dimostrazione:

$$
\begin{aligned}
(f\circ g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{(f\circ g)(x)-(f\circ g)(x_0)}{x-x_0}\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\
&= \underbrace{\lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}}_{*}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\
&= f'(g(x_0))g'(x_0)
\end{aligned}
$$

Il limite $*$ si può calcolare ponendo $t = g(x)$. Siccome g è continua in x_0, si ha infatti

$$x\to x_0 \implies t\to g(x_0)=t_0$$

e quindi

$$*=\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=f'(t_0)=f'(g(x_0)) \qquad \square$$

5 Applicazione delle regole di derivazione

- La regola di derivazione di un quoziente si può ottenere dalle regole per la derivazione di prodotti e funzioni composte:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\cdot[g(x)]^{-1}$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \big(f(x)\cdot[g(x)]^{-1}\big)'\\
&= f'(x)\cdot[g(x)]^{-1}+f(x)\cdot(-1)[g(x)]^{-2}g'(x)\\
&= \frac{f'(x)}{g(x)}-\frac{f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}\\
&= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}
\end{aligned}
$$

- Per la regola di derivazione di una funzione composta:

$h(x)$	$h'(x)$
$e^{f(x)}$	$f'(x) \cdot e^{f(x)}$
$sinf(x)$	$f'(x) \cos f(x)$
$cosf(x)$	$-f'(x) \sin f(x)$

- Per la regola di derivazione di un quoziente:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \\
f'(x) &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ 1 + \tan^2 x \end{cases}
\end{aligned}
$$

- La derivata della funzione

$$
\begin{aligned}
h(x) &= \frac{1}{f(x)} = [f(x)]^{-1} \\
h'(x) &= -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}
\end{aligned}
$$

può essere calcolata sia mediante la regola di derivazione per un quoziente (ricordando che il numeratore, essendo costante, ha derivata 0), che mediante quella per una funzione composta.

6 Derivata di una funzione inversa

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, dove I è un intervallo (qualsiasi), e sia x_0 un punto interno a I. Se f è invertibile in I e derivabile in x_0, con $f'(x_0) \neq 0$, allora la sua inversa f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$, e

$$
\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}
$$

Osservazione: Quando si applica il teorema è necessario riscrivere $f'(x_0)$ in funzione di y_0.

Dimostrazione:

Per la definizione di funzione inversa, $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$, quindi la funzione composta $f^{-1} \circ f$ ha derivata costante 1:

$$\left(f^{-1} \circ f\right)'(x_0) = 1$$

Per la regola di derivazione di una funzione composta, invece,

$$\left(f^{-1} \circ f\right)'(x_0) = \left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} \left(f^{-1} \circ f\right)'(x_0) &= 1 \\ \left(f^{-1}\right)'\underbrace{(f(x_0))}_{y_0} \cdot f'(x_0) &= 1 \\ \left(f^{-1}\right)'(y_0) &= \frac{1}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

se $f'(x_0) \neq 0$. □

6.1 Applicazione

- Sia $y = e^x \implies \log y = x$. Per il teorema,

  $$(\log y)' = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

  quindi la derivata del logaritmo è

  $$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

- Sia $y = \sin x \implies \arcsin y = x$. Applicando il teorema, si ottiene

  $$(\arcsin y)' = \frac{1}{\cos x}$$

Siccome $x = \arcsin y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, si ha che $\cos x \geq 0$. Inoltre, essendo al denominatore, il coseno deve essere diverso da 0, perciò $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \implies \cos x > 0$. Di conseguenza, $\cos x = |\cos x|$, e allora si può scrivere

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{|\cos x|} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

La derivata dell'arcoseno è, in generale,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

- Sia $y = \tan x \implies \arctan y = x$. Allora, per il teorema,

$$(\arctan y)' = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + y^2}$$

quindi la derivata dell'arcotangente è

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$