Azzolini Riccardo 2018-11-20

Metodo di Cramer e sistemi omogenei

1 Sistemi con $m = n$

Dato un sistema di equazioni lineari $A \cdot x = b$, se il numero di equazioni (m) è uguale al numero di incognite (n) allora la matrice dei coefficienti A è quadrata.

È allora possibile calcolarne il determinante di A. Se esso è diverso da 0:

1. $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A \mid b) = n$, quindi il sistema ha una e una sola soluzione
2. A è invertibile, quindi la soluzione è $x = A^{-1} \cdot b$

2 Metodo di Cramer

Se $A \cdot x = b$ è un sistema lineare con n equazioni in n incognite e $\det A \neq 0$, allora l'unica soluzione è

$$x_i = \frac{\det A_{x_i}}{\det A} \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, n$$

dove A_{x_i} è la matrice ottenuta sostituendo l'i-esima colonna di A con b.

2.1 Esempio

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + z = 0 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \det A = -4 \neq 0$$

$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{0}{-4} = 0$$

$$A_y = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$A_z = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad z = \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{0}{-4} = 0$$

La soluzione è quindi $(0, 1, 0)$.

3 Sistemi omogenei

Un sistema $A \cdot x = b$ si dice **omogeneo** se b è il vettore nullo, cioè se tutti i termini noti sono 0:

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

In questo caso vale sempre $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A \mid b)$, quindi un sistema omogeneo ha sempre soluzioni. In particolare, esiste sempre la soluzione banale $(0, \dots, 0)$, che è anche l'unica se $\operatorname{rg} A = n$ (altrimenti è una delle infinite soluzioni).

3.1 Esempio con una soluzione

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \det A = 5 \neq 0 \implies \operatorname{rg} A = 2 = n$$

Siccome $\operatorname{rg} A = n$, l'unica soluzione è quella banale: $(0, 0)$.

3.2 Esempio con infinite soluzioni

$$\begin{cases} x + y \phantom{{}+z} = 0 \\ x \phantom{{}+y} + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det A = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0 \implies \operatorname{rg} A = 2 < n$$

Ci sono quindi ∞^1 soluzioni. Per determinarne la forma, si considerano solo due equazioni, corrispondenti a righe linearmente indipendenti di A:

$$\begin{cases} x + y \phantom{{}+z} = 0 \\ x \phantom{{}+y} + z = 0 \end{cases}$$

Come parametro viene scelto z:

$$\begin{cases} y = -x \\ x = -z \end{cases} \implies \begin{cases} y = z \\ x = -z \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni è quindi:

$$\{(-z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$