Azzolini Riccardo 2020-04-27

Calcolo a tableaux – Completezza

1 Hintikka set

Definizione: Un insieme di formule Γ è un **Hintikka set** (abbreviato **H-set**) se:

- Γ non contiene coppie complementari;
- se $\neg\neg A \in \Gamma$, allora $A \in \Gamma$;
- se $A \in \Gamma$, e A è un'α-formula con ridotti B e C, allora $B, C \in \Gamma$;
- se $A \in \Gamma$, e A è una β-formula con ridotti B e C, allora $B \in \Gamma$ oppure $C \in \Gamma$;

Osservazione: Non è richiesto che Γ sia un insieme finito.

1.1 Esempi

- $\Gamma_1 = \{A \to B, B, C\}$ è un H-set:
  - Γ_1 non contiene coppie complementari;
  - $A \to B \in \Gamma$ è una β-formula con ridotti $\neg A, B$, e $B \in \Gamma$.
- $\Gamma_2 = \{B, A \to B, A \wedge C, A\}$ non è un H-set: $A \wedge C$ è un'α-formula con ridotti B, C, ma $C \notin \Gamma_2$.
- $\Gamma_3 = \{\neg(A \to B), A \wedge C, A\}$ non è un H-set, perché $\neg(A \to B)$ è un'α-formula con ridotti $A, \neg B$, ma $\neg B \notin \Gamma_3$ (e inoltre, come nell'esempio precedente, $A \wedge C \in \Gamma_3$, ma $C \notin \Gamma_3$).
- $\Gamma_4 = \{\neg A, B, A \to B, A \vee C, C, \neg B\}$ non è un H-set, perché contiene la coppia complementare $B, \neg B$.

2 Schema della dimostrazione di completezza

Per dimostrare la completezza del calcolo a tableaux $\mathrm{T}_{\mathrm{CPL}}$, si inizia dimostrando i seguenti lemmi:

- LH1: Ogni H-set è soddisfacibile.
- LH2: Se ρ è un ramo aperto di un tableau completo per Γ, allora Δ_ρ è un H-set.

Da questi, e dal fatto che $\Gamma \subseteq \Delta_\rho$, si deduce:

- LH3: Se Γ ha un tableau completo e aperto, allora Γ è soddisfacibile.

Di conseguenza, se Γ è insoddisfacibile, ogni tableau completo per Γ è chiuso, da cui segue immediatamente il teorema:

- *Teorema* (di completezza di $\mathrm{T}_{\mathrm{CPL}}$): Se un insieme finito di formule Γ è insoddisfacibile, allora esiste un tableau completo chiuso per Γ.

3 Soddisfacibilità degli H-set

Lemma (LH1): Ogni H-set è soddisfacibile.

Dimostrazione: Sia Γ un H-set. Si definisce la seguente valutazione $v : VAR \to \{0, 1\}$:

$$\widetilde{\forall} p \in VAR \quad v(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in \Gamma \\ 0 & \text{se } p \notin \Gamma \end{cases}$$

Si dimostra per induzione su $\mathrm{rg}(H)$ che, per ogni $H \in \Gamma$, si ha $v \models H$.

- *Base*: $\mathrm{rg}(H) = 1$, cioè H è un letterale:
  - Se $H = p \in \Gamma$, allora, per definizione
    $$v(p) = 1 \implies v \models p$$
  - Se invece $H = \neg p \in \Gamma$, allora $p \notin \Gamma$ (perché Γ, in quanto H-set, non contiene coppie complementari), e quindi
    $$v(p) = 0 \implies v \not\models p \implies v \models \neg p$$
- *Ipotesi induttiva*: Per ogni $K \in \Gamma$ tale che $\mathrm{rg}(K) = h \geq 1$, $v \models K$.
- *Passo induttivo*: Sia $H \in \Gamma$, con $\mathrm{rg}(H) = h + 1$. Si procede per casi sulla forma di H:

- Sia $H = \neg\neg K$. Poiché Γ è un H-set, $K \in \Gamma$. Dunque, dato che $\mathrm{rg}(K) \leq h$, per ipotesi di induzione si ha che

$$v \models K \implies v \models \neg\neg K$$

- Sia H un'α-formula con ridotti K_1 e K_2. Allora, essendo Γ un H-set, per definizione si ha anche $K_1, K_2 \in \Gamma$. Dato che $\mathrm{rg}(K_1) \leq h$ e $\mathrm{rg}(K_2) \leq h$, per l'ipotesi induttiva si ha che

$$v \models K_1 \text{ e } v \models K_2 \implies v \models K_1 \wedge K_2$$

  e quindi, ricordando che, in generale, una α-formula è equivalente alla congiunzione dei suoi ridotti, $H \equiv K_1 \wedge K_2$, si deduce che $v \models H$.

- Sia H una β-formula con ridotti K_1 e K_2. Per la definizione di H-set, deve essere $K_1 \in \Gamma$ oppure $K_2 \in \Gamma$. Dato che $\mathrm{rg}(K_1) \leq h$ e $\mathrm{rg}(K_2) \leq h$, per ipotesi induttiva

$$v \models K_1 \text{ o } v \models K_2 \implies v \models K_1 \vee K_2$$

  Di conseguenza, siccome $H \equiv K_1 \vee K_2$ (una β-formula equivale alla disgiunzione dei suoi ridotti), $v \models H$.

4 Richiamo – Proprietà dei tableaux

Nelle dimostrazioni successive, verranno usate alcune proprietà dei tableaux, dimostrate in precedenza:

1. *Proposizione* (PT1): Sia $\rho = N_1, \dots, N_k$ un ramo di un tableau $\mathcal{T}$ (non necessariamente completo). Per ciascuna formula $H \in \Delta_\rho$ valgono le seguenti proprietà:

   a) Se H è un letterale, allora $H \in \Gamma_{N_k}$, cioè appartiene alla foglia del ramo.

   b) Se invece H è composta, allora:

      - o $H \in \Gamma_{N_k}$,
      - oppure deve esistere un indice $i \in \{1, \dots, k-1\}$ – l'indice di un nodo del ramo che non sia la foglia – per cui $H \in \Gamma_{N_i}$ ma $H \notin \Gamma_{N_{i+1}}$, e N_{i+1} è ottenuto da N_i scomponendo la formula H.

2. *Proposizione* (PT2): Siano $\rho = N_1, \dots, N_k$ un ramo di un tableau *completo* $\mathcal{T}$ e H una formula composta. Valgono le seguenti proprietà:

   a) Se $H = \neg\neg A \in \Delta_\rho$, cioè se compare sul ramo una formula del tipo $\neg\neg A$, allora $A \in \Delta_\rho$, cioè sul ramo compare anche A.

b) Se, invece, sul ramo è presente un'α-formula $H \in \Delta_\rho$, con ridotti H_1, H_2, allora $H_1, H_2 \in \Delta_\rho$.

c) Se $H \in \Delta_\rho$ è una β-formula con ridotti H_1, H_2, allora compare sul ramo anche (almeno) uno dei due ridotti: $H_1 \in \Delta_\rho$ o $H_2 \in \Delta_\rho$.

3. *Proposizione* (PT3): Sia $\rho = N_1, \ldots, N_K$ un ramo di un tableau completo $\mathcal{T}$ per Γ. Se Δ_ρ contiene una coppia complementare, allora anche Γ_{N_k} contiene una coppia complementare.

5 Un ramo aperto è un H-set

Lemma (LH2): Se ρ è un ramo aperto di un tableau completo per Γ, allora Δ_ρ è un H-set.

Dimostrazione: Per prima cosa, si osserva che Δ_ρ non contiene coppie complementari, poiché ρ è aperto. Infatti, se invece Δ_ρ contenesse una coppia complementare, per la PT3 sarebbe presente una tale coppia anche nella foglia del ramo, ovvero, per definizione, il ramo sarebbe chiuso.

Tutte le altre proprietà degli H-set seguono direttamente dalla PT2:

- se $\neg\neg A \in \Delta_\rho$, allora $A \in \Delta_\rho$;
- se $A \in \Delta_\rho$, e A è un'α-formula con ridotti B e C, allora $B, C \in \Delta_\rho$;
- se $A \in \Delta_\rho$, e A è una β-formula con ridotti B e C, allora $B \in \Delta_\rho$ oppure $C \in \Delta_\rho$;

6 Lemma principale

Lemma (LH3): Se Γ ha un tableau completo e aperto, allora Γ è soddisfacibile.

Dimostrazione: Sia $\mathcal{T}$ un tableau completo e aperto per Γ. Per definizione, $\mathcal{T}$ ha almeno un ramo aperto; sia ρ tale ramo. Allora:

1. per LH2, Δ_ρ è un H-set;
2. per LH1, Δ_ρ è soddisfacibile;
3. l'insieme Γ è quello associato alla radice di $\mathcal{T}$ (poiché questo è, appunto, un tableau per Γ), e ogni ramo del tableau (compreso ρ) ha come primo nodo la radice, quindi $\Gamma \subseteq \Delta_\rho$, e dunque anche Γ è soddisfacibile.

7 Teorema di completezza

Teorema (di completezza di $\mathrm{T}_{\mathrm{CPL}}$): Se un insieme finito di formule Γ è insoddisfacibile, allora esiste un tableau completo chiuso per Γ.

Dimostrazione: Per prima cosa, si osserva che esiste sempre almeno un tableau per qualunque Γ. Come caso limite, se Γ è composto solo da letterali (o è vuoto), l'albero costituito dalla sola radice è comunque un tableau (in particolare, l'unico esistente per Γ).

Da LH3 si deduce, utilizzando la contronominale, che se Γ non è soddisfacibile (è insoddisfacibile) allora non esiste un tableau completo e aperto per Γ, ma almeno un tableau esiste sempre, e quindi deve esistere un tableau completo chiuso per Γ.

Osservazione: In realtà, si è dimostrata un'affermazione più forte: *ogni tableau completo per* Γ *è chiuso*. Questa proprietà vale per la logica proposizionale classica, ma non per altri sistemi logici.

8 Tableaux chiusi non completi

Per la PT3, se un nodo N di un ramo contiene una coppia complementare $H, \neg H$,[1] anche nel caso in cui H sia una formula composta si può arrestare subito lo sviluppo del ramo, senza bisogno di arrivare fino alle foglie: tutti i rami completi che partono da N saranno sicuramente chiusi.

Utilizzando questa considerazione, si può formulare una versione più forte del teorema di completezza, eliminando la richiesta che il tableau chiuso sia completo:

Teorema (di completezza di $\mathrm{T}_{\mathrm{CPL}}$): Se un insieme finito di formule Γ è insoddisfacibile, allora esiste un tableau chiuso per Γ.

9 Tableaux e tautologie

Proposizione: Una formula H è una tautologia se e solo se ogni tableau per $\{\neg H\}$ è chiuso.

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} H \text{ è una tautologia} &\iff \neg H \text{ non è soddisfacibile} \\ &\iff \text{ogni tableau per } \{\neg H\} \text{ è chiuso} \end{aligned}$$

[1] Più in generale, le due formule H e $\neg H$ possono essere presenti anche solo in nodi diversi del ramo.

9.1 Esempio

Sia $H = \neg(A \to \neg B) \to (A \wedge B)$. Un tableau per $\neg H$ è il seguente:

$$\begin{array}{c}
\neg(\neg(A \to \neg B) \to (A \wedge B)) \\
| \\
\neg(A \to \neg B), \neg(A \wedge B) \\
| \\
A, \neg\neg B, \neg(A \wedge B) \\
| \\
A, B, \neg(A \wedge B) \\
\swarrow \qquad \searrow \\
{\color{red}A}, B, {\color{red}\neg A} \qquad A, {\color{red}B}, {\color{red}\neg B}
\end{array}$$

Entrambi i rami sono chiusi, quindi $\neg H$ è insoddisfacibile, e di conseguenza H è una tautologia.

10 Tableaux aperti e contromodelli

Un'altra proprietà che si può dimostrare, e che fornisce un'informazione aggiuntiva relativamente agli insiemi di formule per cui si hanno solo tableaux aperti è la seguente:

Proposizione: Se un insieme finito di formule Γ ha un tableau completo aperto, si può estrarre da esso una valutazione che verifica Γ.

Dimostrazione: Per LH3, avendo un tableau completo aperto, Γ è soddisfacibile:

$$\begin{aligned}
\rho \text{ aperto} &\implies \Delta_\rho \text{ è un H-set} && \text{(LH2)} \\
&\implies \Delta_\rho \text{ è soddisfacibile} && \text{(LH1)} \\
&\implies \Gamma \text{ è soddisfacibile}
\end{aligned}$$

(dove $\rho = N_1, \dots, N_k$ è un ramo aperto del tableau). La dimostrazione di LH1 indica come costruire una valutazione v che soddisfi l'H-set Δ_ρ, e, siccome $\Gamma \subseteq \Delta_\rho$, si avrà anche $v \models \Gamma$:

$$\widetilde{\forall} p \in VAR \quad v(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in \Delta_\rho \\ 0 & \text{se } p \notin \Delta_\rho \end{cases}$$

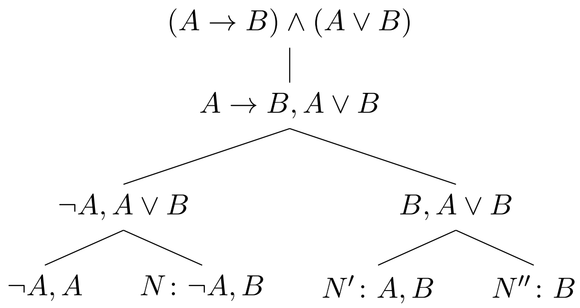
Per la PT1, tutti i letterali presenti in Δ_ρ compaiono anche nell'insieme associato alla foglia del ramo, Γ_{N_k}, dunque (per praticità) la valutazione può essere costruita considerando anche solo Γ_{N_k}:

$$\widetilde{\forall} p \in VAR \quad v(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in \Gamma_{N_k} \\ 0 & \text{se } p \notin \Gamma_{N_k} \end{cases}$$

Osservazione: Se $\Gamma = \{\neg H\}$ ha un tableau completo aperto, allora $v \models \neg H$, ovvero $v \not\models H$, quindi v è un esempio di modello (valutazione) che rende falsa H, o, in altre parole, un controesempio che indica che H non è una tautologia. In generale, un modello che rende falsa una formula (o un insieme di formule) viene chiamato **contromodello** per la formula (o l'insieme).

10.1 Esempio

Sia $H = (A \to B) \wedge (A \vee B)$. Un tableau aperto per H è il seguente:



Dalle foglie dei (tre) rami aperti, si estraggono le seguenti valutazioni che soddisfano H:

$$\begin{aligned} v_N(A) = 0,\ v_N(B) = 1 &\implies v_N \models (A \to B) \wedge (A \vee B) \\ v_{N'}(A) = 1,\ v_{N'}(B) = 1 &\implies v_{N'} \models (A \to B) \wedge (A \vee B) \\ v_{N''}(A) = 0, v_{N''}(B) = 1 &\implies v_{N''} \models (A \to B) \wedge (A \vee B) \end{aligned}$$

11 Tableaux e conseguenza logica

I tableaux possono essere usati per verificare la conseguenza logica:

$$\begin{aligned} \Gamma \models H &\iff \Gamma \cup \{\neg H\} \text{ è insoddisfacibile} \\ &\iff \text{esiste un tableau chiuso per } \Gamma \cup \{\neg H\} \end{aligned}$$

11.1 Esempi

- Siano $\Gamma = \{\neg A\}$ e $H = (A \wedge \neg B) \to (A \wedge B)$. Un tableau per $\Gamma \cup \{\neg H\}$ è:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
\neg A, \neg((A \wedge \neg B) \to (A \wedge B)) \arrow[d, no head] \\
\neg A, A \wedge \neg B, \neg(A \wedge B) \arrow[d, no head] \\
\neg A, A, \neg B, \neg(A \wedge B)
\end{tikzcd}$$

Siccome esso è chiuso, $\Gamma \cup \{\neg H\}$ è insoddisfacibile, ovvero

$$\neg A \models (A \wedge \neg B) \to (A \wedge B)$$

- Siano $\Gamma = \{A \to B\}$ e $H = \neg A \to B$. Un possibile tableau per $\Gamma \cup \{\neg H\}$ è

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=tiny]
 & A \to B, \neg(\neg A \to B) \arrow[d, no head] & \\
 & A \to B, \neg A, \neg B \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\
\neg A, \neg B & & B, \neg B
\end{tikzcd}$$

che è aperto, quindi

$$A \to B \not\models \neg A \to B$$

- Siano $\Gamma = \{A \to B\}$ e $H = \neg B \to \neg A$. Per $\Gamma \cup \{\neg H\}$ si costruisce il seguente tableau:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=tiny]
 & A \to B, \neg(\neg B \to \neg A) \arrow[d, no head] & \\
 & A \to B, \neg B, \neg\neg A \arrow[d, no head] & \\
 & A \to B, \neg B, A \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\
\neg A, \neg B, A & & B, \neg B, A
\end{tikzcd}$$

Esso è chiuso, perciò

$$A \to B \models \neg B \to \neg A$$