Azzolini Riccardo 2020-10-01

Automi a stati finiti deterministici

1 Definizione formale

Un **automa a stati finiti deterministico** (**DFA**, *Deterministic Finite Automaton*) è una quintupla $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ in cui:

- Q è l'insieme *finito* e *non vuoto* degli **stati**;
- Σ è l'**alfabeto** (insieme finito di simboli) di input;
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ è la **funzione di transizione**, che a ogni possibile coppia (q, a) di uno stato q e un simbolo in input a associa uno stato q'[1] (informalmente, essa descrive come l'automa evolve quando, trovandosi in un certo stato, vede un certo simbolo in input);
- $q_0 \in Q$ è lo **stato iniziale**[2] (che informalmente rappresenta il punto da cui "partono" le computazioni dell'automa, la sua "configurazione di default");
- $F \subseteq Q$ è l'insieme degli **stati finali** o **accettanti**, che può essere un qualunque sottoinsieme di Q (compresi i casi limite $F = \varnothing$ e $F = Q$).

Notazione: Per indicare che $\delta(q, a) = q'$ si può scrivere $q \xrightarrow{a} q'$.

1.1 Osservazioni

La definizione appena data descrive le componenti necessarie a definire un DFA. Per specificare un particolare DFA, bisogna fornire istanze di ciascuna di queste componenti, indicando:

- quali sono gli elementi di Q;
- quali sono i simboli dell'alfabeto Σ;
- come è fatta la funzione di transizione δ, cioè in particolare qual è l'elemento del codominio Q che essa associa a ciascun elemento $(q, a) \in Q \times \Sigma$ del suo dominio;
- quale elemento di Q è lo stato iniziale;
- come è fatto l'insieme degli stati finali F.

[1] q e q' potrebbero anche coincidere.

[2] La necessità di avere uno stato iniziale "giustifica" il requisito che Q sia un insieme non vuoto: esso deve appunto contenere almeno q_0.

In particolare, per quanto riguarda la funzione di transizione, è importante ricordare che, secondo la definizione di funzione, essa deve associare un valore a *ogni* elemento del dominio (una funzione che invece associa valori solo a un sottoinsieme del dominio è detta **funzione parziale**).

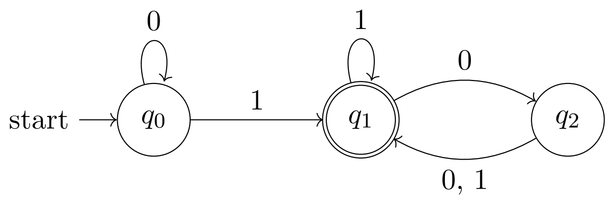
Siccome gli insiemi Q e Σ sono insiemi finiti, anche il dominio $Q \times \Sigma$ della funzione di transizione è finito, quindi è possibile descrivere tale funzione in forma tabellare. Se $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_n\}$ e $\Sigma = \{a_0, a_1, \dots, a_m\}$, allora questa tabella ha la forma:

δ	a_0	a_1	$\dots$	a_m
q_0	$\delta(q_0, a_0)$	$\delta(q_0, a_1)$	$\dots$	$\delta(q_0, a_m)$
q_1	$\delta(q_1, a_0)$	$\delta(q_1, a_1)$	$\dots$	$\delta(q_1, a_m)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
q_n	$\delta(q_n, a_0)$	$\delta(q_n, a_1)$	$\dots$	$\delta(q_n, a_m)$

- gli stati sono elencati sulle righe;
- i simboli dell'alfabeto sono elencati sulle colonne;
- ogni cella presenta il valore della funzione δ per lo stato corrispondente alla riga della cella e il simbolo corrispondente alla colonna della cella.

1.2 Esempio

Si consideri l'automa rappresentato dal seguente diagramma:



Formalmente, le sue componenti sono:

- l'insieme di stati $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$;
- l'alfabeto di input $\Sigma = \{0, 1\}$ (l'insieme dei simboli che nel diagramma compaiono come etichette delle transizioni);
- lo stato iniziale q_0;
- l'insieme di stati finali $F = \{q_1\}$;
- la funzione di transizione $\delta : \{q_0, q_1, q_2\} \times \{0, 1\} \to \{q_0, q_1, q_2\}$, che può essere descritta mediante la seguente tabella:

δ	0	1
q_0	q_0	q_1
q_1	q_2	q_1
q_2	q_1	q_1

In realtà, la tabella appena riportata descrive già quasi completamente l'automa: oltre alla specifica dei valori della funzione δ, le intestazioni delle righe elencano tutti gli stati, e le intestazioni delle colonne elencano tutti i simboli dell'alfabeto. Per ottenere una descrizione completa e compatta dell'automa è dunque sufficiente indicare nella tabella anche lo stato iniziale (con una freccia) e quelli finali (con degli asterischi):

δ	0	1
$\to q_0$	q_0	q_1
$*q_1$	q_2	q_1
q_2	q_1	q_1

2 Sequenza di mosse su una stringa

Il passaggio di un automa da uno stato p a uno stato r in seguito alla lettura di un simbolo in input a, $p \xrightarrow{a} r$, può essere chiamato una **mossa** dell'automa. Tale concetto può essere esteso alla lettura di una stringa di simboli in input.

Dati uno stato $r_0 \in Q$ e una stringa $w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$, con $n \geq 1$ (cioè $|w| > 0$, ovvero $w \neq \epsilon$), si indica con

$$r_0 \xrightarrow{a_1} r_1 \xrightarrow{a_2} r_2 \cdots r_{n-1} \xrightarrow{a_n} r_n$$

la **sequenza di mosse** (o **computazione**) dell'automa a partire da r_0 sull'input w. Questa non è altro che una sequenza di singole mosse dell'automa, dove ciascuna mossa è determinata dalla funzione di transizione:

$$\forall i = 1, \dots, n \quad r_i = \delta(r_{i-1}, a_i)$$

Gli stati $r_0, \dots, r_n$ che compaiono nella sequenza sono detti **stati attraversati dalla sequenza di mosse**. Si osserva che una sequenza di mosse che legge n simboli attraversa $n + 1$ stati.

Se r_0 è lo stato iniziale dell'automa, nella rappresentazione della sequenza di mosse lo si decora con una freccia entrante:

$$\to r_0 \xrightarrow{a_1} r_1 \xrightarrow{a_2} r_2 \cdots r_{n-1} \xrightarrow{a_n} r_n$$

2.1 Caso della stringa vuota

La definizione di sequenza di mosse appena presentata esclude il caso in cui l'input è la stringa vuota, $w = \epsilon$. Questo perché la stringa vuota non contiene simboli dell'alfabeto, dunque l'automa non potrebbe eseguire alcuna mossa.

In realtà, la nozione di sequenza di mosse potrebbe essere estesa (a costo di renderla un po' più complicata) in modo da considerare formalmente il caso limite della sequenza vuota, e ciò darebbe luogo a una trattazione più elegante, in quanto tale nozione risulterebbe definita su tutte le stringhe di Σ^*. Tuttavia, per l'uso delle sequenze di mosse che si farà in seguito (che saranno sostanzialmente esempi di computazione sugli automi), questa estensione non è in pratica utile.

2.2 Osservazioni

- A ogni mossa della sequenza, un carattere della stringa in input viene *"consumato"*. Di conseguenza, se la lunghezza dell'input è $|w| = n$, allora la sequenza consiste di n mosse (una per ogni simbolo considerato), e gli stati $r_0, r_1, r_2, \dots, r_{n-1}, r_n$ attraversati dalla sequenza di mosse sono $n + 1 = |w| + 1$ (quello di partenza r_0, più quello raggiunto dopo ciascuna delle n mosse), ma non sono necessariamente tutti diversi tra loro (una sequenza di mosse può attraversare uno stesso stato più volte, anche di seguito se $\delta(q, a) = q$).
- Siccome δ è una funzione in senso "standard", matematico, per qualunque combinazione di stato q e simbolo in input a il risultato $\delta(q, a)$ della mossa è *sempre definito* e *univocamente determinato*. Ciò significa che la sequenza di stati attraversati durante una computazione è univocamente determinata dallo stato di partenza r_0 e dalla stringa letta w. Tale proprietà è quella che rende **deterministico** questo tipo di automa.

3 Stringa accettata

Sia $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ un DFA e sia $w = a_1, \dots, a_n \in \Sigma^*$ (se $n = 0$, allora $w = \epsilon$). Si dice che A **accetta** w se e solo se esiste una sequenza di stati $r_0, r_1, \dots, r_n$ in Q tale che:

1. r_0 è lo stato iniziale di A;
2. $\forall i = 1, \dots, n, \ \delta(r_{i-1}, a_i) = r_i$;
3. $r_n \in F$.

Nel caso in cui $|w| > 0$, questa definizione afferma sostanzialmente che una stringa è accettata se esiste una sequenza di mosse (una computazione) su tale stringa che parte dallo stato iniziale e arriva in uno stato finale:

$$\to r_0 \xrightarrow{a_1} r_1 \xrightarrow{a_2} r_2 \cdots r_{n-1} \xrightarrow{a_n} r_n \qquad \text{con } r_0 = q_0,\ r_n \in F$$

Considerando invece la stringa vuota, $w = \epsilon$, si ha che essa viene accettata se e solo se lo stato iniziale q_0 è anche uno stato finale: $q_0 \in F$. Infatti, per la stringa vuota, avendo $n = 0$ la quantificazione universale $\forall i = 1, \ldots, n$ della condizione 2 risulta *vuotamente verificata* (perché non c'è nessun numero intero su cui far variare i, ovvero non c'è nessun simbolo a_i da considerare), quindi rimangono da verificare solo le altre due condizioni.

4 Linguaggio accettato

Il **linguaggio accettato** (o **riconosciuto**) da un DFA $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ è l'insieme di tutte le stringhe su Σ accettate dall'automa:

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid A \text{ accetta } w\}$$