Azzolini Riccardo 2019-02-18

Alcuni problemi emblematici

1 Problema della celebrità

Definizione: una celebrità è come una persona che *non conosce nessuno* ma *è conosciuta da tutti*.

Problema: dato un insieme di n persone, determinare se questo contiene una celebrità tramite domande del tipo "X conosce Y?".

1.1 Soluzione naive

Si esaminano le persone una a una.

Per ogni persona X, si verifica se è una celebrità, il che richiede al massimo $2(n-1)$ domande:

- le altre $n-1$ persone devono conoscere X
- X non deve conoscere nessuna delle altre $n-1$ persone

In totale, quindi, possono servire al massimo $2n(n-1) = 2n^2 - 2n$ domande.

1.2 Osservazioni

Non può esistere più di una celebrità. Ciò si dimostra per assurdo: se A e B fossero entrambe celebrità, allora A non conoscerebbe nessuno, neanche B, quindi B non sarebbe conosciuta da tutti e non potrebbe essere una celebrità (e, viceversa, anche A non sarebbe conosciuta da B).

1.3 Soluzione efficiente

1. Si seleziona a caso una coppia di persone (X, Y):
   - se X conosce Y, allora X non può essere una celebrità perché conosce qualcuno;
   - se invece X non conosce Y, quest'ultima non può essere una celebrità perché non è conosciuta da tutti.

In questo modo, con una domanda si elimina un candidato.

2. Si ripete il passo 1 sull'insieme delle $n-1$ persone restanti.
3. Dopo $n-1$ passi, cioè $n-1$ domande, rimane un solo candidato. Si verifica se è una celebrità, facendo al massimo $2n-3$ domande: normalmente, per questo controllo servirebbero $2n-2$ domande (come nella soluzione naive) ma si può riutilizzare il risultato dell'ultima domanda fatta al passo 2, dalla quale si sa già che il candidato finale non conosce o non è conosciuto da un'altra persona (il penultimo candidato).

Il numero massimo di domande necessarie è quindi la soluzione dell'equazione di ricorrenza

$$c_n = c_{n-1} + 1, \quad c_1 = 2n-3$$

cioè

$$\begin{aligned} c_n &= 2n - 3 + \overbrace{1 + 1 + \cdots + 1}^{n-1} \\ &= 2n - 3 + n - 1 \\ &= 3n - 4 \end{aligned}$$

2 Problema del missionario chirurgo

Problema: quante persone è possibile operare con n paia di guanti, evitando il contatto tra tessuti e superfici infette?

2.1 Soluzione naive

Si utilizza un paio di guanti per ogni operazione. È quindi possibile operare solo n persone.

2.2 Osservazioni

- Ogni guanto ha una superficie interna e una esterna, quindi n paia di guanti hanno $2n$ superfici.
- È possibile infilare guanti uno sopra l'altro per evitare di contaminarne l'interno, ad eccezione del primo paio che si indossa.

Si potranno quindi effettuare al massimo $2n-1$ interventi.

2.3 Soluzione efficiente

1. Si effettua il primo intervento con tutti gli n guanti infilati.
2. Si sfila il guanto esterno (sporco fuori, ma pulito dentro) e lo si mette da parte.
3. Si effettuano tutti gli interventi possibili con $n-1, \ldots$ guanti, fino all'intervento effettuato con 1 solo paio di guanti.
4. Si rovescia un paio di guanti messi da parte e lo si infila sopra al primo paio: l'esterno sporco del primo paio rimane a contatto con l'interno sporco (che prima era l'esterno) del guanto messo da parte, mentre il nuovo esterno è pulito.
5. Si rovesciano e infilano uno a uno tutti gli altri guanti messi da parte.

Il numero di operazioni che si possono effettuare è quindi

$$c_n = c_{n-1} + 2, \quad c_1 = 1$$
$$c_n = 1 + \underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-1} = 2n - 1$$

cioè il massimo possibile.