

# Linguaggio dei palindromi

## 1 Teorema

Il linguaggio dei palindromi su  $\{0, 1\}$  è definito come

$$L_{pal} = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w = w^R\}$$

In precedenza, si è dimostrato che tale linguaggio non è regolare, e si è invece mostrata una CFG che intuitivamente lo genera,

$$G_{pal} = \langle \{P\}, \{0, 1\}, \Gamma, P \rangle$$

con le produzioni

$$P \rightarrow \epsilon \mid 0 \mid 1 \mid 0P0 \mid 1P1$$

Adesso, si vuole dimostrare formalmente che  $G_{pal}$  genera effettivamente  $L_{pal}$ , e dunque che quest'ultimo è un linguaggio context-free.

*Teorema:*  $L(G_{pal}) = L_{pal}$ .

## 2 Dimostrazione

Per verificare che  $L(G_{pal}) = L_{pal}$ , si dimostrerà che, per ogni stringa  $w \in \{0, 1\}^*$ ,  $w \in L_{pal} \iff w \in L(G_{pal})$ , trattando separatamente i due versi del  $\iff$ .

### 2.1 Verso $\implies$

Per iniziare, si dimostra che  $w \in L_{pal} \implies w \in L(G_{pal})$ , ovvero  $L_{pal} \subseteq L(G_{pal})$ , per induzione sulla lunghezza di  $w$ .

- *Caso base:*  $|w| = 0$  oppure  $|w| = 1$ , cioè  $w = \epsilon$ ,  $w = 0$  o  $w = 1$ . Dalle regole di produzione

$$P \rightarrow \epsilon \quad P \rightarrow 0 \quad P \rightarrow 1$$

e dalla proprietà (D1) di  $\overset{*}{\implies}$  si deduce che:

$$P \overset{*}{\implies} \epsilon \quad P \overset{*}{\implies} 0 \quad P \overset{*}{\implies} 1$$

Siccome  $P$  è il simbolo iniziale della grammatica, per definizione  $\epsilon, 0, 1 \in L(G_{pal})$ .

- *Passo induttivo*:  $|w| \geq 2$ . Per l'ipotesi  $w \in L_{pal}$ , deve essere  $w = w^R$ , dunque  $w = axa$ , con  $a \in \{0, 1\}$  e  $x \in L_{pal}$ . Dato che  $|x| < |w|$ , vale su  $x$  l'ipotesi induttiva  $x \in L(G_{pal})$ , che per definizione implica  $P \xrightarrow{*} x$ . Considerando poi le regole di produzione

$$P \rightarrow 0P0 \quad P \rightarrow 1P1$$

dalla proprietà (D1) di  $\xrightarrow{*}$  si ha che

$$P \xrightarrow{*} 0P0 \quad P \xrightarrow{*} 1P1$$

ovvero  $P \xrightarrow{*} aPa$ . Infine, grazie alla proprietà (D2) di  $\xrightarrow{*}$ , si deduce da  $P \xrightarrow{*} x$  e  $P \xrightarrow{*} aPa$  che  $P \xrightarrow{*} axa$ , cioè  $axa = w \in L(G_{pal})$ .

## 2.2 Verso $\Leftarrow$

Adesso rimane da dimostrare che  $w \in L(G_{pal}) \implies w \in L_{pal}$ , ovvero  $L(G_{pal}) \subseteq L_{pal}$ , per induzione sulla lunghezza della derivazione  $P \xrightarrow{*} w$ , la quale esiste per l'ipotesi  $w \in L(G_{pal})$ .

- *Caso base*: la lunghezza della derivazione è 1. Ciò significa che  $P \xrightarrow{*} w$  è una derivazione in un passo, nella quale deve essere stata applicata una regola di produzione che a destra ha soltanto simboli terminali. Gli unici casi possibili sono allora

$$P \Rightarrow \epsilon \quad P \Rightarrow 0 \quad P \Rightarrow 1$$

e ciascuna delle stringhe così ottenute è un palindromo su  $\{0, 1\}$ :  $w \in L_{pal}$ .

- *Passo induttivo*: la lunghezza della derivazione è  $h + 1$ , con  $h \geq 1$ . Se la derivazione ha più di un passo, il primo passo deve essere stato fatto applicando una regola di produzione che introduce sulla destra un simbolo non-terminale (altrimenti non sarebbero possibili passi successivi al primo, e si ricadrebbe nel caso base). Le uniche regole di produzione con un simbolo non-terminale a destra sono  $P \rightarrow 0P0$  e  $P \rightarrow 1P1$ , quindi la derivazione deve essere del tipo

$$P \Rightarrow a \underset{x_1}{\square} Pa \Rightarrow ax_2a \Rightarrow \cdots \Rightarrow ax_{h+1}a = w$$

con  $a \in \{0, 1\}$ .

Considerando solo i passi successivi al primo, si ottiene la derivazione  $aPa \xrightarrow{*} ax_{h+1}a = w$ , che ha lunghezza  $h$ . Dalla proprietà (D3) di  $\xrightarrow{*}$  segue che  $P \xrightarrow{*} x_{h+1}$  con una derivazione di lunghezza  $h$  (dalla dimostrazione della proprietà (D3) si può osservare che la derivazione  $P \xrightarrow{*} x_{h+1}$  ha la stessa lunghezza della derivazione  $aPa \xrightarrow{*} ax_{h+1}a$ ), dunque si deduce per ipotesi induttiva che  $x_{h+1} \in L_{pal}$ . Allora, aggiungendo lo stesso simbolo  $a \in \{0, 1\}$  all'inizio e alla fine di  $x_{h+1}$  si ottiene ancora un palindromo,  $ax_{h+1}a = w \in L_{pal}$ .