

# Calcolo a tableaux – Correttezza

## 1 Coppie complementari

*Definizione:* Una coppia di formule  $A, \neg A$  si dice **complementare**.

Una coppia complementare di formule non è soddisfacibile: per ogni valutazione  $v$ ,  $v \models A$  se e solo se  $v \not\models \neg A$ , e viceversa. In particolare, nel caso degli insiemi di letterali, vale il seguente risultato:

*Proposizione:* Un insieme di letterali è soddisfacibile se e solo se *non contiene* coppie complementari.

*Dimostrazione:* Sia  $\Gamma$  un insieme di letterali che non contiene coppie complementari, e sia  $v$  la seguente valutazione:

$$\forall p \in VAR \quad v(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in \Gamma \\ 0 & \text{se } p \notin \Gamma \end{cases}$$

Allora,  $v \models \Gamma$ , perché, considerando una formula (un letterale)  $H \in \Gamma$ :

- se  $H = p \in VAR$ , per costruzione di  $v$  si ha  $v \models p$ ;
- se invece  $H = \neg p$ ,  $p \in VAR$ , per ipotesi deve essere  $p \notin \Gamma$  (altrimenti  $\Gamma$  conterrebbe la coppia complementare  $p, \neg p$ ), quindi  $v \not\models p$ , che implica  $v \models \neg p$ .

Questa proposizione è interessante perché stabilisce una relazione tra una proprietà sintattica, l'esistenza in  $\Gamma$  di coppie complementari, e una proprietà semantica, la soddisfacibilità di  $\Gamma$ .

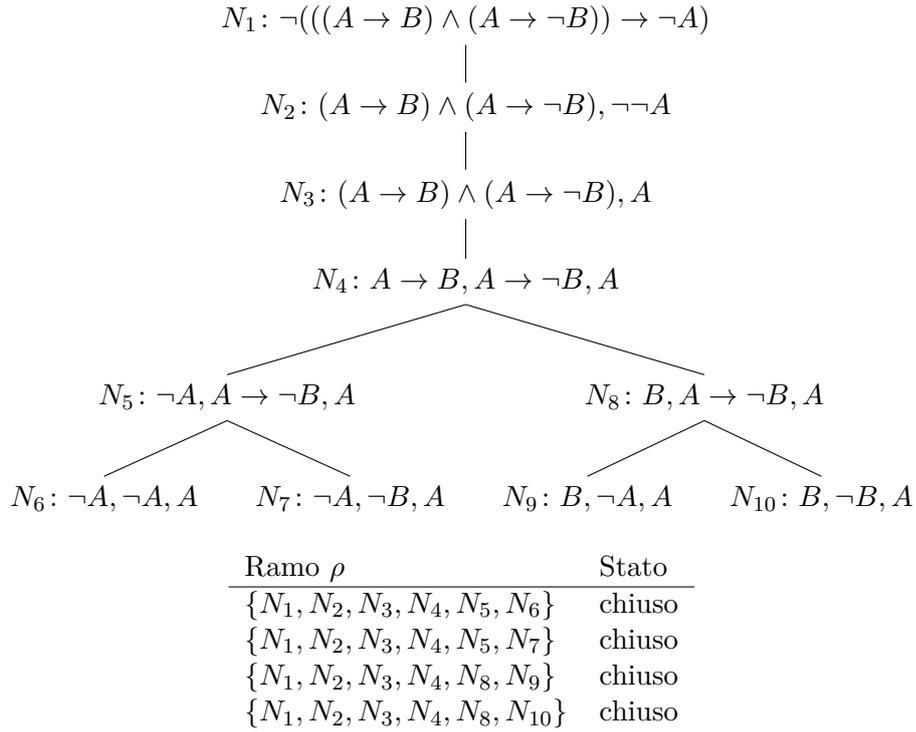
## 2 Rami di un tableau

*Definizione:* Sia  $\mathcal{T}$  un tableau (non necessariamente completo) per un insieme di formule  $\Gamma$ . Un **ramo** di  $\mathcal{T}$  è una sequenza  $\rho = N_1, \dots, N_k$  di nodi di  $\mathcal{T}$  tali che:

- $N_1$  è la radice di  $\mathcal{T}$ ;
- $\forall i = 1, \dots, k-1$ ,  $N_{i+1}$  è un successore diretto (figlio) di  $N_i$ ;
- $N_k$  è una foglia dell'albero.

In altre parole, un ramo è una sequenza di nodi che vanno dalla radice a una foglia, e che comprende, nell'ordine, tutti i nodi su tale percorso.





Siccome tutte le foglie contengono una coppia complementare, ogni ramo è chiuso, e allora il tableau è complessivamente chiuso.

## 4 Rapporto fra tableaux e semantica

*Teorema* (di validità e completezza di  $T_{CPL}$ ): Un insieme finito di formule  $\Gamma$  è insoddisfacibile se e solo se esiste un *tableau completo chiuso* per  $\Gamma$ .

Questo è un risultato centrale nell'ambito della logica. In generale, i teoremi di validità e completezza dei calcoli sono i risultati principali per ogni logica, in quanto riducono il problema di verificare una proprietà semantica essenziale a quello di verificare una proprietà sintattica.

Nel caso della logica proposizionale, è comunque possibile ragionare direttamente sulla semantica, dato che questa può essere descritta mediante tavole di verità finite. Questa è, però, una caratteristica specifica proprio della logica proposizionale classica: già passando alla logica predicativa (del primo ordine) si perde la possibilità di avere una rappresentazione finita della semantica di una formula. Allora, il teorema di validità e completezza diventa più significativo, in quanto riduce lo studio della semantica, la quale fa appunto riferimento a valutazioni effettivamente infinite, allo studio di oggetti finiti.

## 4.1 Schema della dimostrazione

Tipicamente, per dimostrarlo, questo teorema viene affrontato separando gli aspetti di validità e di completezza, cioè i due versi del “se e solo se”:

- *Teorema* (di validità o correttezza di  $T_{CPL}$ ): Se esiste un tableau completo chiuso per  $\Gamma$ , allora  $\Gamma$  è insoddisfacibile.

Questo teorema è detto di validità o di correttezza in quanto dimostra che l’esistenza di un certo oggetto sintattico (in questo caso, un tableau completo chiuso per  $\Gamma$ ) è effettivamente una “certificazione” della proprietà semantica considerata (che qui è l’insoddisfacibilità).

- *Teorema* (di completezza di  $T_{CPL}$ ): Se un insieme finito di formule  $\Gamma$  è insoddisfacibile, allora esiste un tableau completo chiuso per  $\Gamma$ .

In generale, per qualunque logica, il teorema di validità è la parte “facile” da dimostrare (è sufficiente ragionare sulla forma delle regole del calcolo), mentre il teorema di completezza è un risultato “difficile”, che richiede dei ragionamenti più articolati. Spesso, per questo motivo, l’intero teorema di validità e completezza (con il “se e solo se”) è chiamato semplicemente teorema di completezza.

## 5 Teorema di validità – Lemma principale

Nel caso dei calcoli a tableaux, il lemma principale per dimostrare il teorema di validità è quello che garantisce che *le regole di  $T_{CPL}$  preservano la soddisfacibilità*:

*Lemma:* Per ogni (istanza di) regola  $\mathcal{R}$  di  $T_{CPL}$ , se la premessa di  $\mathcal{R}$  è soddisfacibile, allora almeno una delle conclusioni è soddisfacibile.

*Dimostrazione:* Come esempio, si considera il caso della regola

$$\frac{\Gamma, \neg(A \wedge B)}{\Gamma, \neg A \mid \Gamma, \neg B} \neg\wedge$$

Si assume che la premessa sia soddisfacibile, cioè che esista una valutazione  $v$  tale che  $v \models \Gamma, \neg(A \wedge B)$ . Allora:

$$\begin{aligned} & v \models \Gamma \quad \text{e} \quad v \models \neg(A \wedge B) \\ & v \models \Gamma \quad \text{e} \quad v \not\models (A \wedge B) \\ & v \models \Gamma \quad \text{e} \quad (v \not\models A \text{ o } v \not\models B) \\ & v \models \Gamma \quad \text{e} \quad (v \models \neg A \text{ o } v \models \neg B) \\ (v \models \Gamma \text{ e } v \models \neg A) \quad \text{o} \quad & (v \models \Gamma \text{ e } v \models \neg B) \quad \text{(legge distributiva di e su o)} \\ (v \models \Gamma, \neg A) \quad \text{o} \quad & (v \models \Gamma, \neg B) \end{aligned}$$

Quindi, è dimostrato che  $v$  verifica almeno una delle due conclusioni  $\Gamma, \neg A$  e  $\Gamma, \neg B$ .

La dimostrazione per le altre regole è analoga.

## 6 Dimostrazione del teorema di validità

Utilizzando il lemma appena dimostrato, si può provare il teorema di validità (correttezza) di  $T_{\text{CPL}}$ . Innanzitutto, si ricorda l'enunciato di tale teorema:

*Teorema:* Se esiste un tableau completo chiuso per  $\Gamma$ , allora  $\Gamma$  è insoddisfacibile.

*Dimostrazione:* Sia  $\mathcal{T}$  un tableau completo chiuso per  $\Gamma$ . Si dimostra che, per ogni nodo  $N$  di  $\mathcal{T}$ , l'insieme di formule  $\Gamma_N$  associato a tale nodo è insoddisfacibile. Evidentemente, questo significa che anche l'insieme associato alla radice dell'albero, cioè  $\Gamma$ , è insoddisfacibile.

La dimostrazione procede per induzione sull'altezza  $h(N)$  di un nodo  $N$  nell'albero  $\mathcal{T}$ , così definita:<sup>1</sup>

$$h(N) = \begin{cases} 0 & \text{se } N \text{ è una foglia di } \mathcal{T} \\ h(N') + 1 & \text{se } N \text{ ha un solo figlio } N' \\ \max\{h(N'), h(N'')\} + 1 & \text{se } N \text{ ha due figli } N', N'' \end{cases}$$

- *Base:*  $h(N) = 0$  significa che  $N$  è una foglia. Essendo  $\mathcal{T}$  completo e chiuso, l'insieme  $\Gamma_N$  contiene una coppia complementare di letterali, quindi è insoddisfacibile.
- *Ipotesi induttiva:* Per ogni nodo  $M$  di  $\mathcal{T}$  con  $h(M) = k \geq 0$ ,  $\Gamma_M$  è insoddisfacibile.
- *Passo induttivo:* Sia  $N$  un nodo di  $\mathcal{T}$  con  $h(N) = k + 1$ . Poiché la sua altezza è maggiore di 0 (dato che  $k \geq 0$ ), sicuramente  $N$  non è una foglia, ovvero ha uno o due figli, a seconda che la regola  $\mathcal{R}$  applicata a  $\Gamma_N$  nella costruzione del tableau sia una  $\alpha$ -regola o una  $\beta$ -regola.

In ogni caso, per definizione, l'altezza dei figli di  $N$  è minore di  $h(N)$  (cioè  $\leq k$ ), quindi si può applicare l'ipotesi induttiva, con la quale si deduce che  $\Gamma_M$  è insoddisfacibile per ogni figlio  $M$  di  $N$ .

Ma gli insiemi di formule associati ai figli di  $N$  sono le conclusioni dell'applicazione di  $\mathcal{R}$ . Allora, per il lemma dimostrato in precedenza, anche la premessa della regola, ovvero  $\Gamma_N$ , è insoddisfacibile (se non lo fosse, allora dovrebbe essere soddisfacibile almeno una delle conclusioni, al contrario di quanto afferma l'ipotesi induttiva).

---

<sup>1</sup>Questa è la definizione convenzionale dell'altezza di un nodo in un albero.