Azzolini Riccardo 2020-04-16

Variabili aleatorie continue

1 Esercizi sulle densità

1.1 Esercizio 1

Trovare il valore della costante $k \in \mathbb{R}$ per il quale la funzione

$$f(x) = \begin{cases} k - 5 + x & \text{se } 5 \le x \le 6 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è una densità di probabilità, poi ricavare la funzione di ripartizione $F(x)$, e calcolare le probabilità

- $P\{5 < X < 5.5\}$
- $P\{5 < X < 6\}$
- $P\{5.5 < X < 7\}$

(dove X è una variabile aleatoria avente $f(x)$ come densità).

Perché $f(x)$ sia una densità, è necessario che:

1. $f(x) \ge 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1$

La proprietà 1 è immediatamente verificata per $x < 5$ e $x > 6$, dove $f(x) = 0$. Invece, per $5 \le x \le 6$, si osserva che la funzione $f(x) = k - 5 + x$ è crescente in x, quindi assume il valore minimo in $x = 5$. Allora, scegliendo k in modo che $f(5) \ge 0$,

$$\begin{aligned} f(5) &\ge 0 \\ k - 5 + 5 &\ge 0 \\ k &\ge 0 \end{aligned}$$

si avrà anche $f(x) \ge f(5) \ge 0 \quad \forall x \in [5, 6]$. Dunque, complessivamente, la 1 è verificata per $k \ge 0$.

Per la proprietà 2, si calcola innanzitutto l'integrale,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt &= \int_5^6 (k-5+t)\,dt \\
&= \left[kt - 5t + \frac{1}{2}t^2\right]_5^6 \\
&= 6k - 5\cdot 6 + \frac{1}{2}6^2 - 5k + 5\cdot 5 - \frac{1}{2}5^2 \\
&= k - 5 + \frac{36-25}{2} \\
&= k + \frac{-10+11}{2} \\
&= k + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

e poi si pone uguale a 1 il risultato:

$$\begin{aligned}
k + \frac{1}{2} &= 1 \\
k &= 1 - \frac{1}{2} \\
k &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Il valore $k = \frac{1}{2} \geq 0$ soddisfa entrambe le proprietà 1 e 2, quindi è quello che rende $f(x)$ una densità:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - 5 + x & \text{se } 5 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} x - \frac{9}{2} & \text{se } 5 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Adesso, per ricavare la funzione di ripartizione $F(x)$, è necessario calcolare l'integrale

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Siccome $f(x)$ è definita a tratti, anche questo integrale deve essere calcolato a tratti:

- Per $x < 5$, la densità è nulla, quindi l'integrale vale 0:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$

- Per $5 \leq x \leq 6$:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{5}^{x} \left(t - \frac{9}{2}\right)\,dt \\
&= \left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{9}{2}t\right]_5^x \\
&= \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{2}x - \frac{1}{2}5^2 + \frac{9}{2}5 \\
&= \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{-25+45}{2} \\
&= \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{20}{2} \\
&= \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{2}x + 10
\end{aligned}$$

- Per $x > 6$, la densità diventa nuovamente nulla, quindi è sufficiente integrare su $x \leq 6$:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{5}^{6} \left(t - \frac{9}{2}\right)\,dt \\
&= \left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{9}{2}t\right]_5^6 \\
&= \frac{1}{2}6^2 - \frac{9}{2}6 - \frac{1}{2}5^2 + \frac{9}{2}5 \\
&= \frac{6^2 - 9 \cdot 6 - 5^2 + 9 \cdot 5}{2} \\
&= \frac{36 - 9 - 25}{2} \\
&= \frac{2}{2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

  In realtà, questo risultato poteva essere dedotto direttamente dalle proprietà delle funzioni di ripartizione. Infatti, $F(x)$ deve "eventualmente" raggiungere il valore 1, cioè deve essere

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} P\{X \leq x\} = 1$$

  ma per $x > 6$ la densità è nulla, ovvero non contribuisce più ad aumentare il valore di $F(x)$, che quindi deve essere già uguale a 1 (o altrimenti non ci arriverebbe mai, e allora $F(x)$ non sarebbe una funzione di ripartizione).

Complessivamente, la funzione di ripartizione è:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 5 \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{2}x + 10 & \text{se } 5 \leq x \leq 6 \\ 1 & \text{se } x > 6 \end{cases}$$

Infine, la funzione di ripartizione può essere usata per calcolare le probabilità richieste:

$$
\begin{aligned}
P\{5 < X < 5.5\} &= F(5.5) - F(5) = F(5.5) - 0 = F(5.5) = F\left(\frac{11}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{11}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} \cdot \frac{11}{2} + 10 \\
&= \frac{121}{8} - \frac{99}{4} + 10 \\
&= \frac{121 - 198 + 80}{8} \\
&= \frac{3}{8} = 0.375
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P\{5 < X < 6\} &= F(6) - F(5) = 1 - 0 = 1 \\
P\{5.5 < X < 7\} &= F(7) - F(5.5) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8} = 0.625
\end{aligned}
$$

1.2 Esercizio 2

Trovare il valore della costante $c \in \mathbb{R}$ tale che la funzione

$$
f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^2} & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}
$$

sia una densità di probabilità, disegnare il grafico di tale densità, e calcolare la probabilità $P\{1.5 < X < 2\}$.

Per essere una densità, $f(x)$ deve soddisfare le solite due proprietà:

1. $f(x) \geq 0$ è immediatamente verificata per $x < 1$ e $x > 2$, mentre per $1 \leq x \leq 2$ è verificata se $c \geq 0$ (dato che il denominatore x^2 è positivo).
2. L'integrale di $f(x)$ su tutto $\mathbb{R}$ è

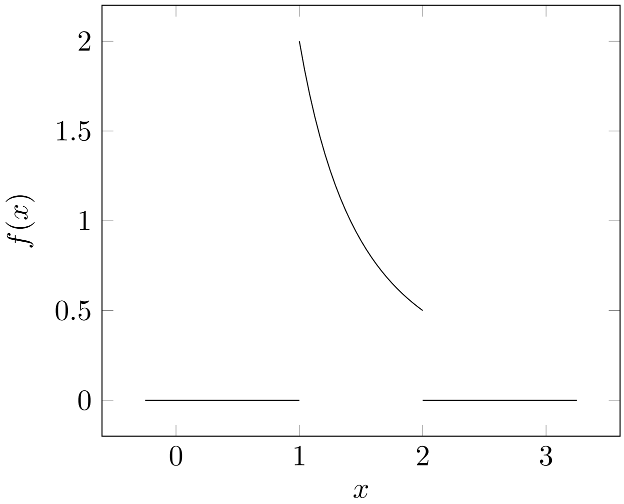
$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt &= \int_1^2 \frac{c}{t^2}\,dt = c\int_1^2 t^{-2}\,dt \\
&= c\big[-t^{-1}\big]_1^2 = c\left(-\frac{1}{2} + 1\right) \\
&= \frac{1}{2}c
\end{aligned}
$$

che vale 1 per $c = 2 \geq 0$.

Allora, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2} & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è una densità, e il suo grafico è il seguente:



Per calcolare la probabilità $P\{1.5 \leq X \leq 2\}$, si potrebbe prima ricavare la funzione di ripartizione (come nell'esercizio precedente), o, in alternativa, si può integrare la densità direttamente sull'intervallo considerato:

$$\begin{aligned} P\{1.5 \leq X \leq 2\} &= \int_{1.5}^{2} f(t)\,dt = \int_{1.5}^{2} \frac{2}{t^2}\,dt \\ &= 2\left[-\frac{1}{t}\right]_{1.5}^{2} = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1.5}\right) \\ &= 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) = 2\frac{-3+4}{6} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

1.3 Esercizio 3

La funzione di ripartizione di una variabile aleatoria X è

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare le probabilità $P\{X > 2\}$ e $P\{-3 < X \leq 4\}$, e determinare la densità di probabilità $f(x)$.

Per calcolare la probabilità $P\{X > 2\}$, conviene sfruttare l'evento complementare:

$$P\{X > 2\} = 1 - P\{X \le 2\} = 1 - F(2) = 1 - (1 - e^{-4}) = e^{-4} \approx 0.01832$$

Invece, $P\{-3 < X \le 4\}$ si calcola come la solita differenza tra valori della funzione di ripartizione:

$$P\{-3 < X \le 4\} = F(4) - F(-3) = F(4) - 0 = 1 - e^{-8} \approx 0.9997$$

Poi, per ricavare la densità, si calcola la derivata di $F(x)$:

- per $x \le 0$, la derivata di $F(x) = 0$ è 0;
- per $x > 0$:
$$f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx}(1 - e^{-2x}) = 2e^{-2x}$$

Quindi, la densità di X *potrebbe* essere:

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per confermare che questa è effettivamente la densità di X, cioè che X è una variabile aleatoria assolutamente continua, bisogna verificare di ritrovare $F(x)$ integrando $f(x)$ (in realtà, qui si potrebbe anche non fare la verifica, perché X è una variabile aleatoria esponenziale, che, come già visto, è assolutamente continua):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt &= \int_0^x 2e^{-2t}\,dt \\ &= 2\int_0^x e^{-2t}\,dt \\ &= 2\left[\frac{e^{-2t}}{-2}\right]_0^x \\ &= \left[-e^{-2t}\right]_0^x \\ &= -e^{-2x} + e^0 \\ &= 1 - e^{-2x} = F(x) \end{aligned}$$

2 Parametri di una distribuzione continua

Le definizioni di momenti, valore medio, varianza e deviazione standard date per le variabili aleatorie discrete possono essere riportate su quelle continue (sostituendo le somme con gli integrali).

Se X è una variabile aleatoria con densità $f(x)$:

- Il **valore medio** di X è definito come

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt$$

- La **varianza** di X è

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = E[(X - E(X))^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t)\, dt$$

  e può anche essere calcolata con la formula

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

  che sfrutta il momento di ordine 2 di X,

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\, dt$$

- La **deviazione standard** di X è la quantità

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

Anche le proprietà di questi parametri si preservano nel passaggio dal discreto al continuo:

- se X e Y sono variabili aleatorie continue con valori medi $E(X)$ e $E(Y)$, allora, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= aE(X) + b \\ E(aX + bY) &= aE(X) + bE(Y) \\ \mathrm{Var}(aX + b) &= a^2 \,\mathrm{Var}(X) \end{aligned}$$

- se X e Y sono variabili aleatorie continue indipendenti, con valori medi $E(X)$ e $E(Y)$, allora, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{Var}(aX + bY) = a^2 \,\mathrm{Var}(X) + b^2 \,\mathrm{Var}(Y)$$

Un caso particolare di queste proprietà, degno di nota, è:

$$\begin{aligned} E(X - Y) &= E(X) - E(Y) \\ \mathrm{Var}(X - Y) &= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \qquad\qquad \text{(se } X \text{ e } Y \text{ indipendenti)} \end{aligned}$$

2.1 Esercizio

Trovare il valore della costante $a \in \mathbb{R}$ che renda la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ a - x & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

una densità di probabilità, determinare il valore medio μ e la varianza σ^2, e calcolare le probabilità che la variabile aleatoria X, avente densità $f(x)$, sia

- compresa tra 0.5 e 1;
- compresa tra 0 e 1;
- compresa tra 0.5 e 2.

Come al solito, si considerano le proprietà delle densità:

1. $f(x) \geq 0$ è immediatamente verificata per $x < 0$ e $x > 2$, dove infatti $f(x) = 0$. La proprietà vale anche per $0 \leq x \leq 1$, perché

$$\frac{1}{2}x \geq 0 \iff x \geq 0$$

ed è vero che $x \geq 0$ se $0 \leq x \leq 1$. Infine, per $1 < x \leq 2$, si osserva che la funzione $f(x) = a - x$ è decrescente in x, ovvero assume il valore minimo in $x = 2$, e:

$$\begin{aligned} f(2) &\geq 0 \\ a - 2 &\geq 0 \\ a &\geq 2 \end{aligned}$$

2. L'integrale di $f(x)$ su $\mathbb{R}$, che si calcola a tratti,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt &= \int_0^1 \frac{1}{2}t\,dt + \int_1^2 (a - t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 + \left[at - \frac{1}{2}t^2\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 0\right) + 2a - \frac{1}{2}2^2 - a + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} + a - 2 + \frac{1}{2} \\ &= a + \frac{1 - 8 + 2}{4} \\ &= a - \frac{5}{4} \end{aligned}$$

vale 1 se

$$\begin{aligned}
a - \frac{5}{4} &= 1 \\
a &= 1 + \frac{5}{4} \\
a &= \frac{9}{4} \geq 2
\end{aligned}$$

Allora, $f(x)$ è una densità di probabilità per $a = \frac{9}{4}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{9}{4} - x & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

A questo punto, si calcola il valore medio, anch'esso "spezzando" l'integrale sui tratti della densità:

$$\begin{aligned}
\mu = E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt \\
&= \int_0^1 t \cdot \frac{1}{2} t\, dt + \int_1^2 t \left(\frac{9}{4} - t \right) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 t^2\, dt + \int_1^2 \left(\frac{9}{4} t - t^2 \right) dt \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 + \left[\frac{9}{4} \cdot \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{3} t^3 \right]_1^2 \\
&= \frac{1}{6} - 0 + \frac{9}{8} \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot 8 - \frac{9}{8} + \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \cdot 8 + \frac{1}{3} + \frac{9}{8} \cdot 4 - \frac{9}{8} \\
&= \frac{1 - 2 \cdot 8 + 2}{6} + \frac{9 \cdot 3}{8} \\
&= \frac{-13}{6} + \frac{27}{8} \\
&= \frac{-52 + 81}{24} \\
&= \frac{29}{24} \approx 1.21
\end{aligned}$$

Si ricava poi il momento di ordine 2,

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\, dt \\
&= \int_0^1 t^2 \cdot \frac{1}{2} t\, dt + \int_1^2 t^2 \left(\frac{9}{4} - t\right)\, dt \\
&= \frac{1}{2} \int t^3\, dt + \int_1^2 \left(\frac{9}{4} t^2 - t^3\right)\, dt \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} t^4\right]_0^1 + \left[\frac{9}{4} \cdot \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{4} t^4\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{9}{4} \cdot \frac{8}{3} - \frac{1}{4} \cdot 16 - \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{9 \cdot 8}{3} - 16 - \frac{9}{3} + 1\right) \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{3 + 9 \cdot 8 \cdot 2 - 16 \cdot 6 - 9 \cdot 2 + 6}{6} \\
&= \frac{39}{24} = \frac{13}{8}
\end{aligned}
$$

che viene usato per trovare la varianza:

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\
&= \frac{13}{8} - \left(\frac{29}{24}\right)^2 \\
&= \frac{13 \cdot 3 \cdot 24 - 29^2}{24^2} \\
&= \frac{936 - 841}{576} \\
&= \frac{95}{576} \approx 0.165
\end{aligned}
$$

Infine, il calcolo delle probabilità richieste è simile a quelli degli esercizi precedenti:

$$
\begin{aligned}
P\{0.5 < X < 1\} &= \int_{0.5}^1 f(t)\, dt = \int_{0.5}^1 \frac{1}{2} t\, dt \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} t^2\right]_{0.5}^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16} = 0.1875
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P\{0 < X < 1\} &= \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{1}{2} t\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - 0 \\
&= \frac{1}{4} = 0.25
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P\{0.5 < X < 1\} &= P\{0.5 < X < 1\} + P\{1 < X < 2\} \\
&= \frac{3}{16} + \int_1^2 f(t)\,dt \\
&= \frac{3}{16} + \int_1^2 \left(\frac{9}{4} - t\right)\,dt \\
&= \frac{3}{16} + \left[\frac{9}{4}t - \frac{1}{2}t^2\right]_1^2 \\
&= \frac{3}{16} + \frac{9}{4}\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot 4 - \frac{9}{4} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{16} + \frac{9}{4} - \frac{1}{2}\cdot 3 \\
&= \frac{3 + 36 - 24}{16} \\
&= \frac{15}{16} = 0.9375
\end{aligned}
$$

3 Esercizio: variabile aleatoria di Cauchy

Sia X una variabile aleatoria uniforme su $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, cioè avente la densità

$$
f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} & \text{se } -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}
$$

Calcolare la legge di $Y = \tan X$.

In questo caso, per determinare la legge di Y, conviene calcolare la funzione di ripartizione $F_Y(y)$:

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{Y \le y\} \\
&= P\{\tan X \le y\}
\end{aligned}
$$

X assume solo valori in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, e la tangente è invertibile in quest'intervallo, quindi si può passare all'inversa, ritrovando così la funzione di ripartizione di X:

$$\begin{aligned}
&= P\{X \leq \arctan y\} \\
&= \int_{-\infty}^{\arctan y} f(x)\,dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arctan y} \frac{1}{\pi}\,dx && \left(\text{perché } -\frac{\pi}{2} < \arctan y < \frac{\pi}{2} \quad \forall y \in \mathbb{R}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\big[x\big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\arctan y} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\arctan y + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{\arctan y}{\pi} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

4 Esercizio: distribuzione di Rayleigh

Sia X una variabile aleatoria reale di densità

$$h_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove θ è un parametro reale maggiore di 0. Calcolare media e varianza di X.

Per il calcolo della media si può applicare direttamente la definizione:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x h_\theta(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}}\,dx$$

L'integrazione si esegue per parti, considerando il *fattore differenziale*

$$f'(x) = \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}}$$

e il *fattore finito* $g(x) = x$. Il calcolo di $g'(x) = 1$ è immediato, mentre, per determinare $f(x)$, è necessaria un'integrazione per sostituzione:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int f'(x)\,dx \\
&= \int \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}}\,dx && t = \frac{x^2}{\theta} \implies dt = \frac{2x}{\theta}\,dx \\
&= \int e^{-t}\,dt \\
&= -e^{-t} = -e^{-\frac{x^2}{\theta}}
\end{aligned}$$

Allora, tornando al calcolo di $E(X)$, si ha:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}}\, dx \\
&= \big[f(x)g(x)\big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(x)g'(x)\, dx \\
&= \left[-e^{-\frac{x^2}{\theta}} x\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\theta}}\, dx \\
&= \lim_{b \to +\infty} \left[-xe^{-\frac{x^2}{\theta}}\right]_0^b + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\theta}}\, dx \\
&= \lim_{b \to +\infty} \Big(\underbrace{-be^{-\frac{b^2}{\theta}}}_{\to 0} + 0\Big) + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\theta}}\, dx \\
&= 0 + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\theta}}\, dx
\end{aligned}
$$

Per calcolare l'integrale rimasto, bisogna ricondursi all'integrale notevole $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \sqrt{2\pi}$. Come primo passo, si osserva che la funzione integranda è pari, quindi l'integrale su $(-\infty, +\infty)$ è uguale al doppio di quello su $(0, +\infty)$:

$$
= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\theta}}\, dx
$$

Si applica poi un cambio di variabile:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt && \frac{t^2}{2} = \frac{x^2}{\theta} \implies \frac{t}{\sqrt{2}} = \frac{x}{\sqrt{\theta}} \\
&= \frac{\sqrt{\theta}}{2\sqrt{2}} \sqrt{2\pi} && \implies x = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{2}} t \\
&= \frac{\sqrt{\theta}\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} && \implies dx = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{2}}\, dt \\
&= \frac{\sqrt{\theta\pi}}{2}
\end{aligned}
$$

Quindi, ricapitolando, il valore medio di X è

$$
E(X) = \frac{\sqrt{\theta\pi}}{2}
$$

Per la varianza, conviene usare la formula $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$. Allora, si calcola prima il momento $E(X^2)$:

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 h_\theta(x)\,dx \\
&= \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}}\,dx \\
&= \frac{1}{\theta}\int_0^{+\infty} x^2 \cdot 2x e^{-\frac{x^2}{\theta}}\,dx && t = x^2 \implies dt = 2x\,dx \\
&= \frac{1}{\theta}\int_0^{+\infty} t e^{-\frac{t}{\theta}}\,dt && f'(t) = e^{-\frac{t}{\theta}} \implies f(t) = -\theta e^{-\frac{t}{\theta}} \\
& && g(t) = t \implies g'(t) = 1 \\
&= \frac{1}{\theta}\left[-\theta t e^{-\frac{t}{\theta}}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{\theta}\int_0^{+\infty} -\theta e^{-\frac{t}{\theta}}\,dt \\
&= \left[-t e^{-\frac{t}{\theta}}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{\theta}}\,dt \\
&= 0 + \left[-\theta e^{-\frac{t}{\theta}}\right]_0^{+\infty} \\
&= \lim_{b\to+\infty}\Big(-\theta \underbrace{e^{-\frac{b}{\theta}}}_{\to 0} + \theta \underbrace{e^0}_{=1}\Big) = \theta
\end{aligned}$$

La varianza è dunque:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\
&= \theta - \left(\frac{\sqrt{\theta\pi}}{2}\right)^2 \\
&= \theta - \frac{\theta\pi}{4} \\
&= \theta\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$