Azzolini Riccardo 2020-03-13

Sintassi della logica proposizionale classica

1 Contesto

La logica matematica tratta i principi di ragionamento. Per studiarla, bisogna allora definire gli elementi di base dei ragionamenti, ed è utile farlo a partire dal linguaggio naturale.

Le unità di espressione del linguaggio naturale vengono chiamate **sentenze**: una sentenza è un aggregato di parole (cioè una frase) di senso compiuto che racchiude un pensiero completo.

Nell'ambito della logica, si considera una particolare famiglia di sentenze: quelle alle quali può essere assegnato un valore di verità (cioè per le quali ha senso dire se siano vere o false), che vengono chiamate **proposizioni** o **asserzioni**. Infatti, la **logica proposizionale** si occupa proprio di studiare il grado di verità delle proposizioni.

Alcuni esempi di asserzioni sono le frasi:

- "questa mela è rossa";
- "il mare è giallo".

Queste frasi sono particolarmente semplici: non possono essere ulteriormente scomposte in "sotto-frasi" che, da sole, abbiano un significato compiuto. Ci sono anche proposizioni caratterizzate da una struttura più complessa, che combinano asserzioni più semplici, come ad esempio "ogni numero intero o è pari o è dispari".

Invece, *non sono asserzioni*:

- le domande ("stai bene?"; "mangi quella mela?");
- le esclamazioni ("vattene!");
- in generale, tutte le frasi per le quali non ha senso dire se siano vere o false.

Osservazione: Il fatto che una frase sia un'asserzione non significa che essa sia "automaticamente" vera. Ad esempio, l'asserzione "questa mela è rossa" potrebbe essere vera o falsa, a seconda del contesto.

2 Asserzioni atomiche, complesse e connettivi

Con gli esempi riportati in precedenza, si sono identificati due tipi di asserzioni:

asserzione atomica: non può essere decomposta in ulteriori asserzioni;

asserzione complessa: è costruita a partire da asserzioni più semplici, composte tra di loro attraverso dei **connettivi**.

I principali connettivi sono:

- **negazione** (es. "*non* è vero che questa mela è rossa");
- **congiunzione** (es. "questa mela è rossa *e* il mare è blu");
- **disgiunzione** (es. "questa mela è rossa *oppure* è gialla");
- **implicazione** (es. "*se* questa mela è rossa *allora* me la mangio").

3 Formalizzazione delle asserzioni

Le asserzioni possono essere formalizzate usando:

- *un simbolo per ogni asserzione atomica*, chiamato **variabile proposizionale** perché il suo valore di verità può variare tra *vero* e *falso*;
- *un simbolo per ogni connettivo.*

Si definisce così il *linguaggio della logica proposizionale.*

4 Alfabeto

Definizione: L'alfabeto del linguaggio della logica proposizionale è costituito dai seguenti simboli:

- l'insieme (virtualmente infinito[1]) VAR delle **variabili proposizionali**, indicate con $X, Y, \dots, p, q, \dots$;
- i **connettivi** $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$, usati per comporre le asserzioni atomiche;
- il simbolo $\bot$, chiamato *bottom*, una costante che rappresentare il valore *falso*;
- le parentesi, "(" e ")", che serviranno per dare struttura e leggibilità alle formule.

Più nel dettaglio, i connettivi sono:

[1] Avere un insieme virtualmente infinito di variabili proposizionali è importante per evitare limiti a priori sul numero di concetti/asserzioni atomici che si possono utilizzare nel descrivere i fatti del mondo.

- $\wedge$ – congiunzione (e, and);
- $\vee$ – disgiunzione (o, or);
- $\rightarrow$ – implicazione (se… allora, implies);
- $\neg$ – negazione (non, not).

$\wedge, \vee, \rightarrow$ sono connettivi **binari**, cioè prevedono due argomenti, e vengono utilizzati in notazione infissa (ponendo i due argomenti rispettivamente a sinistra e a destra del simbolo). Invece, la negazione, $\neg$, è un connettivo **unario**, ovvero ha un solo argomento, ed è utilizzata in notazione prefissa (scrivendo prima il simbolo, e poi il singolo argomento a cui si applica la negazione).

Osservazione: Al momento si sta descrivendo soltanto la forma, cioè la *sintassi*, del linguaggio della logica proposizionale: i vari simboli devono essere visti solo come tali, senza considerarne i significati (la *semantica*).

5 Formule proposizionali

A partire dall'alfabeto, si possono costruire le frasi del linguaggio della logica proposizionale, che prendono il nome di *formule*.

Definizione: Le **formule proposizionali**[2] sono così definite:

- $\perp$ è una formula;
- ogni variabile proposizionale è una formula;
- se A è una formula, allora anche $(\neg A)$ è una formula;
- se A, B sono formule, allora $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ e $(A \rightarrow B)$ sono formule;
- nient'altro è una formula.

Un oggetto appartiene all'insieme *FORM* delle **formule ben formate** (*fbf*) se e solo se rispetta una delle clausole appena elencate.

Terminologia:

- I **connettivi principali** delle formule $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ e $(\neg A)$ sono $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$, rispettivamente.
- Nella formula $(A \rightarrow B)$,
  - A viene chiamato **antecedente** dell'implicazione;
  - B viene chiamato **conseguente** dell'implicazione.

[2] Nel seguito, verrà spesso omesso l'aggettivo "proposizionale", dato che, per il momento, si considerano solo formule di questo tipo.

5.1 Variante della definizione

La definizione di *formula proposizionale*, nella forma appena presentata, descrive cosa sia una formula, partendo dai casi di base (le variabili proposizionali e la costante $\perp$) e mostrando come si costruiscono delle formule più complesse.

La stessa definizione può anche essere espressa secondo uno schema leggermente diverso, definendo invece direttamente l'insieme delle formule ben formate.

Definizione: L'insieme *FORM* delle formule proposizionali è il più piccolo insieme tale che:

- $\perp \in \mathit{FORM}$;
- $\mathit{VAR} \subseteq \mathit{FORM}$;
- se $A \in \mathit{FORM}$, allora $(\neg A) \in \mathit{FORM}$;
- se $A, B \in \mathit{FORM}$, allora $(A \wedge B), (A \vee B), (A \to B) \in \mathit{FORM}$.

Osservazione: Nella definizione precedente, è stato necessario specificare esplicitamente che "null'altro appartiene all'insieme delle formule". Qui si ottiene lo stesso effetto affermando che l'insieme delle formule proposizionali è *il più piccolo* che soddisfa tutte le proprietà elencate.

6 Induzione strutturale

In entrambe le definizioni precedenti, l'insieme delle formule è definito per **induzione strutturale**.

In generale, si parla di induzione strutturale quando, per definire degli oggetti, si indica:

1. quali siano i più piccoli oggetti che si vogliono caratterizzare;
2. come questi vengono composti per costruire oggetti più complessi appartenenti allo stesso insieme.

L'induzione strutturale può essere considerata una generalizzazione dell'induzione sui numeri naturali, in quanto processi di costruzione di elementi più complessi a partire da elementi più semplici.

Questo schema è molto utile, sia per esprimere concetti validi per tutte le formule, sia per verificare proprietà di tutte le formule (facendo, appunto, dimostrazioni per induzione strutturale).

7 Gerarchia dei connettivi

Nella definizione delle formule, sono state messe le parentesi ogni volta che si è costruita una formula più complessa a partire da elementi più semplici: in questo modo, non è ambiguo quali siano gli operandi ai quali si applica ogni operatore (connettivo).

D'altra parte, utilizzare praticamente questa definizione è un po' scomodo, perché si è obbligati a utilizzare molte parentesi. Infatti, secondo la definizione, $p \wedge q$ (ad esempio) *non è una formula*, poiché non ha le parentesi.

Allora, per cercare un compromesso tra praticità e precisione sintattica, si stabiliscono delle regole che permettano di sottintendere la maggior parte delle parentesi:

- si evita di scrivere le parentesi che racchiudono l'intera formula;
- si dà una **gerarchia dei connettivi**, ovvero un ordine di **precedenza** sulla loro applicazione (simile a quello che vale per i comuni operatori aritmetici).

In mancanza di parentesi che chiariscano la situazione, le regole di precedenza che si danno sui connettivi sono le seguenti:

- La *negazione* viene applicata prima degli altri connettivi. Quindi, ad esempio, $\neg p \to q$ va intesa come $(\neg p) \to q$.
- La *congiunzione* e la *disgiunzione* si applicano prima dell'implicazione, ma dopo la negazione. Ad esempio:
  - $p \wedge q \to r \vee s$ va intesa come $(p \wedge q) \to (r \vee s)$;
  - $p \vee \neg q \to p \wedge \neg r$ si legge come $(p \vee (\neg q)) \to (p \wedge (\neg r))$.

Così, è possibile evitare le parentesi quando esse appesantiscono la notazione (mentre, in altri casi, è comodo / più chiaro utilizzarle comunque).

8 Convenzioni sui simboli

- Le lettere $p, q, r, s, \ldots$, e a volte anche $X, Y, Z, \ldots$, indicano variabili proposizionali.
- $A, B, C, \ldots$ indicano formule arbitrarie (cioè non formule concrete, ma insiemi di formule).

  Ad esempio, secondo questa convenzione, $A \wedge B \to C$ è da interpretare come uno "schema" dal quale è possibile ottenere infinite formule, sostituendo delle formule concrete al posto di A, B e C: se, per esempio, si fissano

  $$A = p \wedge q \quad B = q \vee r \quad C = \neg p$$

  allora $A \wedge B \to C$ corrisponde a $(p \wedge q) \wedge (q \vee r) \to \neg p$.

- Quando è necessario parlare in generale di tutte le formule che hanno un connettivo principale binario, si scrive

  $$A * B \quad \text{con } * \in \{\land, \lor, \to\}$$

  che rappresenta appunto una qualunque formula del tipo $A \land B$, $A \lor B$ o $A \to B$.

9 Sottoformule

Definizione: L'**insieme delle sottoformule**, $\mathrm{Sub}(A)$, di una formula A è definito nel seguente modo:

$$\mathrm{Sub}(A) = \begin{cases} \{A\} & \text{se } A = \bot \text{ o } A \in VAR \\ \{A\} \cup \mathrm{Sub}(B) & \text{se } A = \neg B \\ \{A\} \cup \mathrm{Sub}(B) \cup \mathrm{Sub}(C) & \text{se } A = B * C \text{ con } * \in \{\land, \lor, \to\} \end{cases}$$

Inoltre:

- se $A = B * C$, si dice che B e C sono le **sottoformule immediate** (o **principali**) di A;
- se $A = \neg B$, allora B è la sottoformula immediata (o principale) di A.

Osservazione: $\mathrm{Sub}(A)$ è definito per induzione sulla struttura della formula A.

9.1 Variabili proposizionali di una formula

Definizione: L'insieme $\mathrm{Var}(A)$ delle **variabili proposizionali di una formula** A è definito nel seguente modo:

$$\mathrm{Var}(A) = \mathrm{Sub}(A) \cap VAR$$

9.2 Esempio

$$
\begin{aligned}
A &= (p \to r) \land (q \lor \neg p) \\
\mathrm{Sub}(A) &= \{A\} \cup \mathrm{Sub}(p \to r) \cup \mathrm{Sub}(q \lor \neg p) \\
&= \{A\} \cup \{p \to r\} \cup \mathrm{Sub}(p) \cup \mathrm{Sub}(r) \cup \{q \lor \neg p\} \cup \mathrm{Sub}(q) \cup \mathrm{Sub}(\neg p) \\
&= \{A\} \cup \{p \to r\} \cup \{p\} \cup \{r\} \cup \{q \lor \neg p\} \cup \{q\} \cup \{\neg p\} \cup \mathrm{Sub}(p) \\
&= \{A\} \cup \{p \to r\} \cup \{p\} \cup \{r\} \cup \{q \lor \neg p\} \cup \{q\} \cup \{\neg p\} \cup \{p\} \\
&= \{A, p \to r, p, r, q \lor \neg p, q, \neg p, p\} \\
&= \{A, p \to r, q \lor \neg p, \neg p, p, r, q\} \\
\mathrm{Var}(A) &= \mathrm{Sub}(A) \cap \mathit{VAR} \\
&= \{A, p \to r, q \lor \neg p, \neg p, p, r, q\} \cap \mathit{VAR} \\
&= \{p, q, r\}
\end{aligned}
$$

10 Occorrenza di una variabile

Una formula può contenere più volte una stessa variabile come sottoformula. Ad esempio, la formula

$$(\neg p \to q \lor r) \to (\neg p \to q) \lor (\neg p \to r)$$

contiene 3 volte p, 2 volte q e 2 volte r.

Per indicare una *variabile in una posizione particolare* della formula, si parla di **occorrenza** di tale variabile.

Definizione: Il **numero di occorrenze di una variabile** p in una formula A, indicato con $\#(p, A)$, è definito nel seguente modo (per induzione strutturale sulla forma di A):

$$
\#(p, A) = \begin{cases}
1 & \text{se } A = p \\
0 & \text{se } A = \bot \text{ oppure } (A \in \mathit{VAR} \text{ e } A \neq p) \\
\#(p, B) & \text{se } A = \neg B \\
\#(p, B) + \#(p, C) & \text{se } A = B * C \text{ con } * \in \{\land, \lor, \to\}
\end{cases}
$$

10.1 Esempio

$$
\begin{aligned}
A &= (\neg p \to q \vee r) \to (\neg p \to q) \vee (\neg p \to r) \\
\#(p, A) &= \#(p, \neg p \to q \vee r) + \#(p, (\neg p \to q) \vee (\neg p \to r)) \\
&= \#(p, \neg p) + \#(p, q \vee r) + \#(p, \neg p \to q) + \#(p, \neg p \to r) \\
&= \#(p, p) + \#(p, q) + \#(p, r) + \#(p, \neg p) + \#(p, q) + \#(p, \neg p) + \#(p, r) \\
&= 1 + 0 + 0 + \#(p, p) + 0 + \#(p, p) + 0 \\
&= 1 + 1 + 1 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

11 Albero di parsing

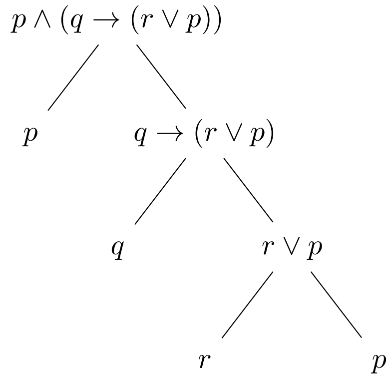
La struttura di una formula A può essere resa esplicita disegnando il suo **albero di parsing**, così definito:

- la radice dell'albero è A;
- se $A = B * C$, con $* \in \{\wedge, \vee, \to\}$, è un nodo dell'albero, allora A ha due nodi figli, B e C;
- se, invece, un nodo contiene una formula $A = \neg B$, esso avrà B come unico figlio;
- i nodi contenenti occorrenze di variabili proposizionali, e della costante $\perp$, sono foglie dell'albero.

In pratica, esso è sostanzialmente una struttura gerarchica che rappresenta il processo di costruzione della formula A.

11.1 Esempio

$$A = p \wedge (q \to (r \vee p))$$



Osservazione: $\mathrm{Sub}(A)$ è l'insieme di tutti i nodi dell'albero di parsing.

12 Lunghezza di una formula

Definizione: La **lunghezza** (**size**) $|A|$ di una formula A è il *numero di connettivi* che compaiono in A, ed è definita per induzione nel modo seguente:

$$|A| = \begin{cases} 0 & \text{se } A \in VAR \text{ o } A = \bot \\ |B| + 1 & \text{se } A = \neg B \\ |B| + |C| + 1 & \text{se } A = B * C \text{ con } * \in \{\land, \lor, \to\} \end{cases}$$

Si possono dare anche definizioni diverse di lunghezza di una formula A:

- il numero totale di occorrenze di variabili in A;
- il numero totale di simboli che occorrono in A.

In realtà, quale di queste tre definizioni si usi è irrilevante, perché esse sono tra loro correlate.

12.1 Esempio

$$A = (p \land (q \to (r \lor p))) \to \bot$$

$$\begin{aligned}
|A| &= |(p \land (q \to (r \lor p))) \to \bot| \\
&= |p \land (q \to (r \lor p))| + |\bot| + 1 \\
&= |p| + |q \to (r \lor p)| + 1 + 0 + 1 \\
&= 0 + |q| + |r \lor p| + 1 + 1 + 0 + 1 \\
&= 0 + 0 + |r| + |p| + 1 + 1 + 1 + 0 + 1 \\
&= 0 + 0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 0 + 1 \\
&= 4
\end{aligned}$$