Azzolini Riccardo 2020-11-16

Proprietà algebriche delle espressioni regolari

1 Proprietà algebriche

Le *proprietà algebriche* sono proprietà degli operatori che possono essere usate per riscrivere un'espressione regolare in una forma equivalente. In genere, l'obiettivo di tali riscritture è semplificare l'espressione regolare prima di calcolarne il valore, cioè il linguaggio generato.

Ogni proprietà algebrica deve essere dimostrata, verificando che le due espressioni coinvolte generino effettivamente lo stesso linguaggio. Tuttavia, per le proprietà che verranno presentate in seguito, le dimostrazioni sono piuttosto semplici, quindi ne verranno mostrate solo alcune.

Siano E, F e G delle espressioni regolari. Le principali proprietà algebriche sono:

$$\begin{aligned}
E + F &= F + E && \text{(commutatività di } +\text{)} \\
(E + F) + G &= E + (F + G) && \text{(associatività di } +\text{)} \\
E + E &= E && \text{(idempotenza di } +\text{)} \\[1ex]
(EF)G &= E(FG) && \text{(associatività di } \cdot\text{)} \\[1ex]
E(F + G) &= EF + EG && \text{(distributività sinistra di } \cdot \text{ su } +\text{)} \\
(E + F)G &= EG + FG && \text{(distributività destra di } \cdot \text{ su } +\text{)} \\[1ex]
\varnothing + E = E + \varnothing &= E && \text{(} \varnothing \text{ è identità per } +\text{)} \\
\epsilon E = E\epsilon &= E && \text{(} \epsilon \text{ è identità per } \cdot\text{)} \\
\varnothing E = E\varnothing &= \varnothing && \text{(} \varnothing \text{ è annichilatore per } \cdot\text{)} \\[1ex]
(E^*)^* &= E^* && \text{(idempotenza di } {}^*\text{)} \\
\varnothing^* &= \epsilon \\
\epsilon^* &= \epsilon
\end{aligned}$$

Si osserva che molte di queste proprietà — in particolare la commutatività, l'associatività, la distributività, le identità e l'annichilatore di $+$ e $\cdot$ — sono analoghe alle proprietà degli operatori $+$ e $\cdot$ nelle espressioni aritmetiche. In altre parole, gli operatori $+$ e $\cdot$

nelle espressioni regolari hanno un comportamento “simile” a quello degli “omonimi” operatori aritmetici, ed è proprio per questo che si sceglie di rappresentare tali operatori con gli stessi simboli.

1.1 Esempi di dimostrazioni

La commutatività di $+$, ad esempio, può essere dimostrata come segue:

$$\begin{aligned} L(E+F) &= L(E) \cup L(F) && \text{per la semantica di } + \\ &= L(F) \cup L(E) && \text{per la commutatività di } \cup \\ &= L(F+E) && \text{per la semantica di } + \end{aligned}$$

Si può anche dimostrare che una proprietà *non* vale. Per esempio, l'operatore $\cdot$ non è commutativo: in generale, $L(EF) \neq L(FE)$. Per verificarlo, è sufficiente trovare un controesempio, come il seguente: se $E = a$ e $F = b$, con $a, b \in \Sigma$, allora

$$\begin{aligned} L(EF) = L(ab) = L(a) \cdot L(b) = \{a\} \cdot \{b\} = \{ab\} \\ L(FE) = L(ba) = L(b) \cdot L(a) = \{b\} \cdot \{a\} = \{ba\} \end{aligned}$$

cioè appunto $L(EF) \neq L(FE)$.

2 Operatori definiti

Quando si definisce un linguaggio, come quello delle espressioni regolari, conviene in generale dare una definizione “minima”, con il minor numero possibile di costrutti, per ridurre il numero di casi da trattare nelle dimostrazioni. Viceversa, quando si usa in pratica un linguaggio, è più comodo avere tanti costrutti, che semplifichino la scrittura delle espressioni in molti casi comuni. A tale scopo, si può arricchire il linguaggio definendo dei nuovi operatori a partire da quelli già presenti.

Ad esempio, l'operatore $^+$ può essere definito tramite gli operatori $\cdot$ e *:

$$E^+ := EE^*$$

(qui $:=$ indica che questa è una definizione, e non un'uguaglianza). La semantica dell'operatore è determinata dall'espressione che lo definisce:

$$L(E^+) := L(EE^*) = L(E) \cdot L(E^*) = L(E) \cdot L(E)^*$$

Si può poi dimostrare che

$$L(E) \cdot L(E)^* = L(E)^+$$

cioè che il linguaggio associato all'espressione E^+ è la chiusura positiva $L(E)^+$ del linguaggio $L(E)$ associato a E.

Anche gli operatori definiti hanno delle proprietà algebriche, come ad esempio:

$$E^+ = E^* E$$
$$E^* = E^+ + \epsilon$$