Azzolini Riccardo 2020-12-14

Esempio di macchina di Turing

1 Descrizione

Si consideri la macchina di Turing

$$M = \langle \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0, 1\}, \{0, 1, X, Y, B\}, \delta, q_0, B, \{q_4\} \rangle$$

il cui "programma" è:

	0	1	X	Y	B
$\rightarrow q_0$	$(q_1, X, \mathtt{R})$	–	–	$(q_3, Y, \mathtt{R})$	–
q_1	$(q_1, 0, \mathtt{R})$	$(q_2, Y, \mathtt{L})$	–	$(q_1, Y, \mathtt{R})$	–
q_2	$(q_2, 0, \mathtt{L})$	–	$(q_0, X, \mathtt{R})$	$(q_2, Y, \mathtt{L})$	–
q_3	–	–	–	$(q_3, Y, \mathtt{R})$	$(q_4, B, \mathtt{R})$
$*q_4$	–	–	–	–	–

Questa macchina riconosce il linguaggio $L(M) = \{0^n1^n \mid n \geq 1\}$.[1] Intuitivamente, essa riconosce una stringa $0^n1^n \in L(M)$ abbinando ciascuno 0 nella prima parte con un 1 nella seconda parte, e controllando:

- che tutti gli 0 siano situati prima di tutti gli 1;
- che alla fine non rimangano 0 o 1 non abbinati, "di troppo".

Gli 0 già abbinati vengono sostituiti con il simbolo X, e gli 1 abbinati vengono sostituiti con Y, in modo da non considerarli di nuovo, e la stringa in input è accettata se alla fine della computazione rimangono solo simboli X e Y.

Più nel dettaglio, la computazione avviene in questo modo:

1. All'inizio, lo stato è q_0 e la testina è sul primo simbolo della stringa in input w. Se questo simbolo è 1 (o se è B, il che avviene quando $w = \epsilon$), allora w non appartiene sicuramente a $L(M)$, e la computazione si blocca. Altrimenti, se il primo simbolo è 0, la macchina deve provare ad abbinarlo con un 1, quindi lo sostituisce con X, si sposta a destra, e passa allo stato q_1:

$$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, \mathtt{R})$$

[1] Questo è un linguaggio context-free, dunque per riconoscerlo sarebbe sufficiente un PDA, ma lo scopo di questo esempio è solo illustrare il funzionamento delle MdT, e farlo su un linguaggio non context-free sarebbe più complicato del necessario.

2. Nello stato q_1, la testina si sposta ripetutamente a destra, lasciando inalterati gli 0 rimanenti ed eventuali Y (che corrispondono a 1 già abbinati nelle iterazioni precedenti),

   $$\delta(q_1, 0) = (q_1, 0, \mathtt{R}) \qquad \delta(q_1, Y) = (q_1, Y, \mathtt{R})$$

   fino a trovare un 1 da abbinare con lo 0 di prima. Se questo viene trovato prima della fine della stringa, cioè prima di incontrare un simbolo blank, la macchina lo sostituisce con una Y, passa allo stato q_2 e inizia a ritornare verso sinistra,

   $$\delta(q_1, 1) = (q_2, Y, \mathtt{L})$$

   altrimenti la computazione si blocca senza accettare, perché w ha più 0 che 1.

3. In q_2, la testina si sposta verso a sinistra fino ad arrivare alla posizione dove prima c'era lo 0 appena abbinato, che adesso è una X,

   $$\delta(q_2, 0) = (q_2, 0, \mathtt{L}) \qquad \delta(q_2, Y) = (q_2, Y, \mathtt{L})$$

   e poi si sposta sulla cella immediatamente a destra, passando allo stato q_0:

   $$\delta(q_2, X) = (q_2, X, \mathtt{R})$$

4. A questo punto, se ci sono ancora 0 da abbinare, la testina è posizionata sullo 0 più a sinistra: l'abbinamento procede da sinistra a destra, quindi la stringa inizia attualmente con una sequenza di X, seguita da una sequenza di 0, e il passo precedente ha lasciato la testina sul primo 0 a destra dell'ultima X. In tal caso, la macchina deve abbinare questo zero, perciò lo sostituisce con una X, si sposta a destra, e passa allo stato q_1 (la stessa mossa eseguita sul primo simbolo, al punto 1),

   $$\delta(q_0, 0, \mathtt{R}) = (q_1, X, \mathtt{R})$$

   dopodiché il processo si ripete dal punto 2.

   Se invece tutti gli 0 situati prima degli 1 sono già stati abbinati, il simbolo a destra dell'ultima X (attualmente sotto la testina) è una Y (corrispondente al primo 1 abbinato), e rimane solo da verificare

   - che anche tutti gli 1 siano stati abbinati,
   - che non ci siano 0 situati a destra di qualche 1,

   ovvero, complessivamente, che tutti i simboli nella parte restante del contenuto significativo del nastro siano Y. A tale scopo, la macchina si sposta a destra (lasciando inalterato il primo simbolo Y) e passa allo stato q_3:

   $$\delta(q_0, Y) = (q_3, Y, \mathtt{R})$$

5. Nello stato q_3, la testina si sposta verso destra fintanto che incontra simboli Y:

$$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, \mathtt{R})$$

Poi:

- se la macchina incontra un simbolo 1 non abbinato, o un simbolo 0 (che non sta nella parte iniziale della stringa, e quindi non è stato abbinato), la computazione si arresta senza accettare la stringa;
- se invece incontra un simbolo B, significa che ha raggiunto la fine del contenuto significativo senza trovare "problemi", quindi passa allo stato finale q_4 per accettare la stringa e arrestarsi:

$$\delta(q_3, B) = (q_4, B, \mathtt{R})$$

(in questa mossa, il simbolo scritto e la direzione di movimento sono irrilevanti, perché tanto non ci sono passi di computazione successivi).

2 Esempi di computazione

Sulla stringa $0011 \in L(M)$, la macchina M esegue la seguente computazione accettante:

$$\begin{aligned}
q_0 0011 &\Rightarrow X q_1 011 && \text{Mossa } \delta(q_0, 0) = (q_1, X, \mathtt{R}) \\
&\Rightarrow X 0 q_1 11 && \delta(q_1, 0) = (q_1, 0, \mathtt{R}) \\
&\Rightarrow X q_2 0 Y 1 && \delta(q_1, 1) = (q_2, Y, \mathtt{L}) \\
&\Rightarrow q_2 X 0 Y 1 && \delta(q_2, 0) = (q_2, 0, \mathtt{L}) \\
&\Rightarrow X q_0 0 Y 1 && \delta(q_2, X) = (q_0, X, \mathtt{R}) \\
&\Rightarrow X X q_1 Y 1 && \delta(q_0, 0) = (q_1, X, \mathtt{R}) \\
&\Rightarrow X X Y q_1 1 && \delta(q_1, Y) = (q_1, Y, \mathtt{R}) \\
&\Rightarrow X X q_2 Y Y && \delta(q_1, 1) = (q_2, Y, \mathtt{L}) \\
&\Rightarrow X q_2 X Y Y && \delta(q_2, Y) = (q_2, Y, \mathtt{L}) \\
&\Rightarrow X X q_0 Y Y && \delta(q_2, X) = (q_0, X, \mathtt{R}) \\
&\Rightarrow X X Y q_3 Y && \delta(q_0, Y) = (q_3, Y, \mathtt{R}) \\
&\Rightarrow X X Y Y q_3 B && \delta(q_3, Y) = (q_3, Y, \mathtt{R}) \\
&\Rightarrow X X Y Y B q_4 B && \delta(q_3, B) = (q_4, B, \mathtt{R})
\end{aligned}$$

Invece, sulla stringa $0010 \notin L(M)$, la macchina M esegue la seguente computazione *non* accettante:

$$
\begin{aligned}
q_0 0010 &\Rightarrow X q_1 010 && \text{Mossa } \delta(q_0, 0) = (q_1, X, \mathtt{R}) \\
&\Rightarrow X0 q_1 10 && \delta(q_1, 0) = (q_1, 0, \mathtt{R}) \\
&\Rightarrow X q_2 0Y0 && \delta(q_1, 1) = (q_2, Y, \mathtt{L}) \\
&\Rightarrow q_2 X0Y0 && \delta(q_2, 0) = (q_2, 0, \mathtt{L}) \\
&\Rightarrow X q_0 0Y0 && \delta(q_2, X) = (q_0, X, \mathtt{R}) \\
&\Rightarrow XX q_1 Y0 && \delta(q_0, 0) = (q_1, X, \mathtt{R}) \\
&\Rightarrow XXY q_1 0 && \delta(q_1, Y) = (q_1, Y, \mathtt{R}) \\
&\Rightarrow XXY0 q_1 B && \delta(q_1, 0) = (q_1, 0, \mathtt{R})
\end{aligned}
$$

$\delta(q_1, B)$ è indefinita, quindi la computazione si blocca e la stringa 0010 non viene accettata.

Anche la stringa $\epsilon \notin L(M)$ non viene accettata: la configurazione iniziale per tale input è $q_0 B$, e $\delta(q_0, B)$ è indefinita, perciò la computazione si blocca immediatamente.