Azzolini Riccardo 2020-04-23

Calcolo a tableaux – Alcune proprietà dei tableaux

1 Insieme associato a un ramo

Definizione: L'**insieme delle formule associato a un ramo** $\rho = N_1, \dots, N_k$ è

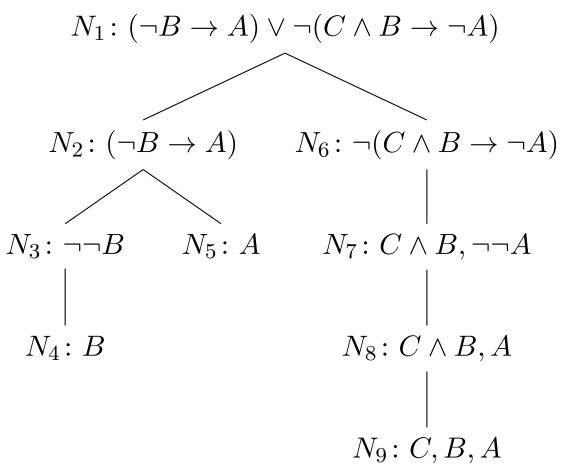
$$\Delta_\rho = \bigcup_{N \in \{N_1, \dots, N_k\}} \Gamma_N$$

cioè l'unione degli insieme di formule associati ai nodi che compaiono sul ramo.

Nota: Per semplicità, nel seguito della discussione, si identificheranno i nodi e i rami di un tableau con gli insiemi di formule a essi associati. Ad esempio, si potrà dire:

- H appartiene al nodo N, intendendo che $H \in \Gamma_N$;
- H appartiene al ramo ρ, intendendo che $H \in \Delta_\rho$.

1.1 Esempio



Ramo ρ	Δ_ρ
$\{N_1, N_2, N_3, N_4\}$	$\{(\neg B \to A) \lor \neg(C \land B \to \neg A),\ \neg B \to A,\ \neg\neg B,\ B\}$
$\{N_1, N_2, N_5\}$	$\{(\neg B \to A) \lor \neg(C \land B \to \neg A),\ \neg B \to A,\ A\}$
$\{N_1, N_6, N_7, N_8, N_9\}$	$\{(\neg B \to A) \lor \neg(C \land B \to \neg A),\ \neg(C \land B \to \neg A),$ $C \land B,\ \neg\neg A,\ C,\ B,\ A\}$

2 Proprietà sulle formule in un ramo di un tableau

Proposizione (PT1[1]): Sia $\rho = N_1, \dots, N_k$ un ramo di un tableau $\mathcal{T}$ (non necessariamente completo). Per ciascuna formula $H \in \Delta_\rho$ valgono le seguenti proprietà:

1. Se H è un letterale, allora $H \in \Gamma_{N_k}$, cioè appartiene alla foglia del ramo.
2. Se invece H è composta, allora:
   - o $H \in \Gamma_{N_k}$,
   - oppure deve esistere un indice $i \in \{1, \dots, k-1\}$ – l'indice di un nodo del ramo che non sia la foglia – per cui $H \in \Gamma_{N_i}$ ma $H \notin \Gamma_{N_{i+1}}$, e N_{i+1} è ottenuto da N_i scomponendo la formula H.

A livello intuitivo, questa proposizione afferma che, se si trova una formula H in un nodo del ramo, nei nodi seguenti del ramo si hanno due possibilità:

- o non si applicano mai regole su H, e allora questa si ritrova in tutti i nodi fino alla foglia;
- oppure c'è un punto in cui si applica una regola su H, e quindi H non è più presente nei nodi successivi (a partire dalle conclusioni della regola).

Dimostrazione: Per prima cosa, guardando le regole, si fa un'osservazione sulla loro forma:

Osservazione generale: Se H appartiene alla premessa di una regola e non è la formula principale della regola (ovvero $H \in \Gamma$), allora appartiene anche a ogni sua conclusione (ancora $H \in \Gamma$). Quindi, se $H \in \Delta_\rho$ e non è la formula principale di nessuna delle regole applicate sul ramo, $H \in \Gamma_{N_k}$.

Adesso si procede alla dimostrazione delle due proprietà:

1. Per dimostrare il caso in cui H è un letterale, è sufficiente osservare che nessuna delle regole del calcolo opera sui letterali. Si deduce quindi dall'osservazione generale che ogni letterale in Δ_ρ compare anche in Γ_{N_k}.
2. Se $H \in \Delta_\rho$ è composta, e se si suppone che $H \notin \Gamma_{N_k}$, allora, per l'osservazione generale, H è stata decomposta nello sviluppo del ramo. Formalmente, ciò significa che esiste un nodo N_i per cui $H \in \Gamma_{N_i}$ e $H \notin \Gamma_{N_{i+1}}$, in quanto H è la formula principale della regola applicata per generare N_{i+1} a partire da N_i (e nessuna delle regole riporta la formula principale nelle sue conclusioni).

   Nota: Per come è costruito l'albero, $\Gamma_{N_{i+1}}$ è appunto una delle conclusioni della regola applicata a Γ_{N_i} con H come formula principale.

[1]PT1 è un nome "sintetico" dato alla proprietà, per poterla citare quando sarà necessario usarla.

3 Proprietà sulle formule composte nei tableaux completi

Proposizione (PT2): Siano $\rho = N_1, \ldots, N_k$ un ramo di un tableau *completo* $\mathcal{T}$ e H una formula composta. Valgono le seguenti proprietà:

1. Se $H = \neg\neg A \in \Delta_\rho$, cioè se compare sul ramo una formula del tipo $\neg\neg A$, allora $A \in \Delta_\rho$, cioè sul ramo compare anche A.
2. Se, invece, sul ramo è presente un'α-formula $H \in \Delta_\rho$, con ridotti H_1, H_2, allora $H_1, H_2 \in \Delta_\rho$.
3. Se $H \in \Delta_\rho$ è una β-formula con ridotti H_1, H_2, allora compare sul ramo anche (almeno) uno dei due ridotti: $H_1 \in \Delta_\rho$ o $H_2 \in \Delta_\rho$.

Dimostrazione: Innanzitutto, siccome $\mathcal{T}$ è completo, l'insieme Γ_{N_k} (associato alla foglia di ρ) è un insieme di letterali, e perciò $H \notin \Gamma_{N_k}$ (in quanto formula composta). Dalla PT1, si ha quindi che H è stata scomposta lungo il ramo; formalmente, $\tilde{\exists} i \in \{1, \ldots, k-1\}$ tale che $H \in \Gamma_{N_i}$ è la formula principale della regola applicata per costruire i successori (figli) di N_i, e $\Gamma_{N_{i+1}}$ è una delle conclusioni di tale regola.

Si può allora usare la forma della regola per determinare in che modo le componenti di H abbiano contribuito alla costruzione di $\Gamma_{N_{i+1}}$:

1. se $H = \neg\neg A$, allora $A \in \Gamma_{N_{i+1}}$, e quindi anche $A \in \Delta_\rho$;
2. se H è un'α-formula, entrambi i suoi ridotti appartengono alla singola conclusione, cioè $H_1, H_2 \in \Gamma_{N_{i+1}}$, che implica $H_1, H_2 \in \Delta_\rho$;
3. se H è una β-formula, ciascuna delle due conclusioni contiene uno dei ridotti, e $\Gamma_{N_{i+1}}$ è appunto una delle conclusioni, quindi $H_1 \in \Gamma_{N_{i+1}}$ oppure $H_2 \in \Gamma_{N_{i+1}}$, da cui $H_1 \in \Delta_\rho$ o $H_2 \in \Delta_\rho$.

4 Proprietà dei rami dei tableaux completi

Proposizione (PT3): Sia $\rho = N_1, \ldots, N_k$ un ramo di un tableau completo $\mathcal{T}$ per Γ. Se Δ_ρ contiene una coppia complementare, allora anche Γ_{N_k} contiene una coppia complementare.

Osservazioni:

- La coppia complementare in Δ_ρ può essere basata su una qualunque formula H, potenzialmente composta, mentre quella in Γ_{N_k} è sicuramente basata su un letterale, poiché $\mathcal{T}$ è completo.
- Il fatto che Δ_ρ contenga una coppia complementare non dice nulla sui nodi in cui compaiono le due formule della coppia. In particolare, non è detto che entrambe le formule siano presenti in uno stesso nodo.

Dimostrazione: Per ipotesi, Δ_ρ contiene una coppia complementare, cioè $\widetilde{\exists} H$ tale che $H, \neg H \in \Delta_\rho$. L'asserto si dimostra per induzione sul rango di H.

- *Base*: $\mathrm{rg}(H) = 1$, quindi H è un letterale (p oppure $\neg p$).
  - Se $H = p \in VAR$, allora, per ipotesi, $p, \neg p \in \Delta_\rho$, da cui, per la PT1, $p, \neg p \in \Gamma_{N_k}$.
  - Se invece $H = \neg p$, $p \in VAR$, per ipotesi si ha $\neg p, \neg\neg p \in \Delta_\rho$. Per la PT2, $\neg\neg p \in \Delta_\rho$ implica anche anche $p \in \Delta_\rho$ (complessivamente, si ha così $p, \neg p \in \Delta_\rho$), da cui, per la PT1, si deduce che $p, \neg p \in \Gamma_{N_k}$.
- *Ipotesi induttiva*: Per ogni A tale che $\mathrm{rg}(A) = h \geq 1$, se $A, \neg A \in \Delta_\rho$, allora Γ_{N_k} contiene una coppia complementare.
- *Passo*: Sia H tale che $\mathrm{rg}(H) = h + 1$. Si procede per casi sulla forma di H.
  - Se $H = \neg\neg B$, per ipotesi, $\neg\neg B, \neg\neg\neg B \in \Delta_\rho$. Dalla PT2, si deduce che $B, \neg B \in \Delta_\rho$. Queste ultime formule hanno rango minore di H ($\mathrm{rg}(B) \leq h$ e $\mathrm{rg}(\neg B) \leq h$), perciò si può applicare l'ipotesi induttiva, che afferma che Γ_{N_k} contiene una coppia complementare.
  - Se $H = H_1 \wedge H_2$ (una congiunzione, cioè un caso specifico di α-formula) allora, per ipotesi,

    $$(H_1 \wedge H_2), \neg(H_1 \wedge H_2) \in \Delta_\rho$$

    Quindi, per la PT2:

    $$\begin{aligned} (H_1 \wedge H_2) \in \Delta_\rho &\implies H_1, H_2 \in \Delta_\rho && (\alpha\text{-formula: PT2.2}) \\ \neg(H_1 \wedge H_2) \in \Delta_\rho &\implies \neg H_1 \in \Delta_\rho \text{ o } \neg H_2 \in \Delta_\rho && (\beta\text{-formula: PT2.3}) \end{aligned}$$

    Mettendo insieme i due fatti appena dedotti, si ha che $H_1, \neg H_1 \in \Delta_\rho$ oppure $H_2, \neg H_2 \in \Delta_\rho$: in entrambi i casi, Δ_ρ contiene una coppia complementare, e dunque, per ipotesi induttiva (applicabile perché $\mathrm{rg}(H_i) < h < \mathrm{rg}(H)$), Δ_ρ contiene una coppia complementare.
  - Se $H = \neg(H_1 \vee H_2)$ (ancora un'α-formula), per ipotesi si ha

    $$\neg(H_1 \vee H_2), \neg\neg(H_1 \vee H_2) \in \Delta_\rho$$

    Applicando, come nel caso precedente, la PT2, si deduce

    $$\begin{aligned} \neg(H_1 \vee H_2) \in \Delta_\rho &\implies \neg H_1, \neg H_2 \in \Delta_\rho && (\alpha\text{-formula: PT2.2}) \\ \neg\neg(H_1 \vee H_2) \in \Delta_\rho &\implies H_1 \vee H_2 \in \Delta_\rho && (\text{doppia negazione: PT2.1}) \\ &\implies H_1 \in \Delta_\rho \text{ o } H_2 \in \Delta_\rho && (\beta\text{-formula: PT2.3}) \end{aligned}$$

    quindi $H_1, \neg H_1 \in \Delta_\rho$ o $H_2, \neg H_2 \in \Delta_\rho$, e infine, per ipotesi induttiva ($\mathrm{rg}(H_i) < h < \mathrm{rg}(H)$), si conclude che Δ_ρ contiene una coppia complementare.

- Gli altri casi, cioè l'α-formula $H = \neg(H_1 \to H_2)$ e le β-formule, si trattano in modo analogo.