Azzolini Riccardo 2021-03-04

Cifratura simmetrica

1 Operazioni fondamentali

La **cifratura simmetrica**, detta anche *convenzionale*, *tradizionale*, *a chiave privata* o *a chiave singola*, sfrutta algoritmi che si basano su due semplici operazioni:

- **sostituzioni** di un simbolo con uno diverso;
- **trasposizioni** o **permutazioni** dell'ordine dei simboli.

Per analizzare le caratteristiche di queste operazioni è utile studiare la *cifratura classica*, cioè gli algoritmi che venivano impiegati, solitamente a mano, prima dell'introduzione dei calcolatori moderni. I simboli su cui tali algoritmi operavano erano in genere le lettere di un testo, mentre per gli algoritmi moderni i simboli sono le combinazioni di bit (ad esempio i byte) che costituiscono un messaggio digitale, ma i principi di base rimangono gli stessi.

In seguito, si inizieranno a presentare le principali tecniche di sostituzione.

2 Cifrario di Cesare

Il **cifrario di Cesare**, così chiamato perché fu utilizzato da Giulio Cesare per scopi militari, sostituisce ogni lettera dell'alfabeto con la lettera che si trova k posizioni più avanti nell'alfabeto.

Il modo in cui le lettere vengono sostituite per un certo valore di k può essere indicato elencando tutte le lettere dell'alfabeto del testo in chiaro e scrivendo, sotto ciascuna di esse, la corrispondente lettera del testo cifrato; per convenzione, si indicano in minuscolo le lettere del testo in chiaro e in maiuscolo quelle del testo cifrato. Ad esempio, per $k = 3$, la sostituzione è:

```
abcdefghijklmnopqrstuvwxyz
DEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZABC
```

Una notazione analoga può essere usata per indicare il testo in chiaro di un messaggio e il corrispondente testo cifrato. Ad esempio, sempre con $k = 3$:

```
meet me after the toga party
PHHW PH DIWHU WKH WRJD SDUWB
```

La chiave del cifrario di Cesare è il valore k: se un messaggio è stato cifrato "andando avanti" di k posizioni nell'alfabeto, per decifrarlo bisogna "tornare indietro" di altrettante posizioni.

Se si assegna a ogni lettera un valore numerico da 0 a 25 (dove 0 corrisponde ad `a` e 25 corrisponde a `z`), allora gli algoritmi di cifratura e decifratura possono essere formalizzati come segue: date la chiave k e una lettera p del testo in chiaro, la corrispondente lettera C del testo cifrato è data dalla formula

$$C = E(p, k) = (p + k) \bmod 26$$

e dalla lettera cifrata C si può risalire alla lettera in chiaro p tramite la formula

$$p = D(C, k) = (C - k) \bmod 26$$

L'uso del modulo in queste formule serve a *garantire la circolarità nel dominio* 0–25:

- se "andando avanti" nell'alfabeto si arriva alla fine, si ritorna all'inizio;
- analogamente, se "andando indietro" si arriva all'inizio, si ritorna alla fine.

Ad esempio, usando le formule con la chiave $k = 5$, il messaggio `howdy` (7 14 22 3 24) viene cifrato e decifrato così:

$$\begin{aligned}
E(7,5) &= (7+5) \bmod 26 = 12 \quad (\texttt{M}) & D(12,5) &= (12-5) \bmod 26 = 7 \quad (\texttt{h}) \\
E(14,5) &= (14+5) \bmod 26 = 19 \quad (\texttt{T}) & D(19,5) &= (19-5) \bmod 26 = 14 \quad (\texttt{o}) \\
E(22,5) &= (22+5) \bmod 26 = 1 \quad (\texttt{B}) & D(1,5) &= (1-5) \bmod 26 = 22 \quad (\texttt{w}) \\
E(3,5) &= (3+5) \bmod 26 = 8 \quad (\texttt{I}) & D(8,5) &= (8-5) \bmod 26 = 3 \quad (\texttt{d}) \\
E(24,5) &= (24+5) \bmod 26 = 3 \quad (\texttt{D}) & D(3,5) &= (3-5) \bmod 26 = 24 \quad (\texttt{y})
\end{aligned}$$

2.1 Attacchi a forza bruta

Il cifrario di Cesare ha solo 26 possibili chiavi ($k = 0, 1, \ldots, 25$), e di queste solo 25 sono concretamente utilizzabili, perché $k = 0$ di fatto non esegue alcuna cifratura (sostituisce ciascuna lettera con se stessa). Di conseguenza, è molto facile provarle tutte, cioè eseguire un attacco a forza bruta (purché si sia in grado di riconoscere il testo in chiaro).

3 Cifratura monoalfabetica

Il cifrario di Cesare è un caso particolare di un algoritmo più generale, la **cifratura monoalfabetica**, così chiamata perché usa un unico alfabeto (mapping) per le sostituzioni (una volta fissata la chiave).

Una sostituzione è rappresentata formalmente da una funzione che associa a ogni lettera dell'alfabeto del plaintext una lettera dell'alfabeto del ciphertext. Il cifrario di Cesare considera solo 25 di queste funzioni: quelle che corrispondono a spostamenti di un numero fisso k di posizioni nell'alfabeto, con k compreso tra 1 e 25.

Nel caso generale della cifratura monoalfabetica, invece, si possono considerare sostituzioni arbitrarie. Allora, per indicare la sostituzione scelta, non è più sufficiente un numero da 1 a 25, ma piuttosto bisogna indicare come viene sostituita ciascuna lettera. Ad esempio:

```
abcdefghijklmnopqrstuvwxyz
DKVQFIBJWPESCXHTMYAUOLRGZN
```

Data questa sostituzione, si può cifrare un messaggio:

```
if we wish to replace letters
WI RF RWAJ UH YFTSDVF SFUUFYA
```

La chiave di questa tecnica di cifratura è rappresentata dall'alfabeto usato per la sostituzione: elencare le lettere di quest'ultimo nell'ordine delle lettere dell'alfabeto del plaintext (cioè, nel caso dell'esempio precedente, scrivere `DKVQFIBJWPESCXHTMYAUOLRGZN`) è sufficiente a descrivere una qualsiasi funzione di sostituzione. Allora, le possibili chiavi sono tutte le permutazioni (senza ripetizione) delle 26 lettere, cioè esistono $26! \approx 4 \cdot 10^{26}$ chiavi distinte. Questo è uno spazio delle chiavi molto più ampio rispetto a quello del cifrario di Cesare, il che risolve il problema degli attacchi a forza bruta: anche facendo un milione di tentativi ogni microsecondo, ci vorrebbero in media $6.4 \cdot 10^6$ anni per trovare la chiave giusta.

3.1 Crittoanalisi

L'ampiezza dello spazio delle chiavi potrebbe far pensare che lo schema di cifratura monoalfabetica sia del tutto sicuro, ma in realtà esso è molto vulnerabile ad attacchi di crittoanalisi, poiché *non nasconde i pattern presenti nel plaintext.*

Ad esempio, in ogni lingua ci sono lettere che compaiono più frequentemente di altre: ad esempio, in inglese, la lettera più frequente è la E, mentre alcune lettere come la X sono usate raramente. Siccome la cifratura monoalfabetica sostituisce tutte le occorrenze

di una lettera nel plaintext con la stessa lettera dell'alfabeto del ciphertext, queste frequenze vengono preservate, e possono essere confrontate con una tabella delle frequenze previste[1] per fare ipotesi su come vadano decifrate le lettere: ad esempio, nel caso di un messaggio in inglese, la lettera più frequente nel ciphertext sarà probabilmente quella che corrisponde alla E nel plaintext.

Inoltre, siccome anche l'ordine delle lettere viene mantenuto, si possono fare ragionamenti analoghi sulla frequenza dei *digrammi* (coppie di lettere), dei *trigrammi* (triple di lettere), ecc.

Nel caso di messaggi digitali, potrebbero non essere presenti pattern dovuti alle regolarità del linguaggio naturale, ma ci sarebbero invece strutture come header, ecc.

4 Sostituzione con più omofoni

Un modo per nascondere le frequenze dell'alfabeto originale è sostituire la stessa lettera con più sostituiti, chiamati **omofoni**, assegnati a rotazione o casualmente: se il numero di omofoni associati a ciascuna lettera è proporzionale alla sua frequenza, allora si cela la frequenza della singola lettera. Rimangono però possibili attacchi di crittoanalisi basati sull'analisi della frequenza di digrammi e trigrammi.

Ci sono due famiglie di soluzioni per associare più omofoni alle lettere:

- i **poligrammi** eseguono le sostituzioni su gruppi di lettere, invece che sulle singole lettere;
- la **cifratura polialfabetica** utilizza più alfabeti, cioè funzioni di sostituzione diverse.

4.1 Playfair

Un esempio di poligramma è lo schema **Playfair**, adottato dall'esercito inglese durante la prima guerra mondiale. Esso è in particolare un digramma, cioè cifra due lettere alla volta. Ogni lettera ha più omofoni, scelti in base al digramma di appartenenza.

Gli algoritmi di cifratura e decifratura usano una matrice di 5×5 lettere, contenente tutte le lettere dell'alfabeto. Siccome l'alfabeto (inglese) ha 26 lettere, mentre la matrice ha solo 25 celle, è necessario mettere insieme due lettere, tipicamente `I` e `J`: esse vengono trattate come se fossero la stessa lettera, cioè usate in modo intercambiabile.

Per costruire la matrice:

[1] Se non è già disponibile, questa tabella può essere facilmente calcolata da un qualunque testo di dimensioni sufficienti, ad esempio un dizionario.

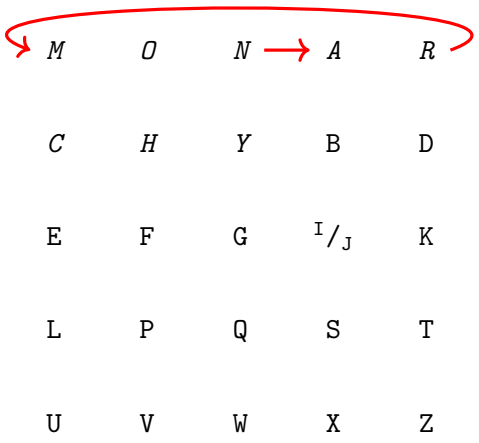
1. si inserisce la parola chiave, procedendo da sinistra a destra e dall'alto verso il basso (cioè nell'ordine di lettura di un normale testo) e omettendo le lettere duplicate;
2. si riempiono le restanti celle della matrice con tutte le altre lettere dell'alfabeto, in ordine alfabetico.

Ad esempio, con la chiave `MONARCHY` si costruisce la seguente matrice:

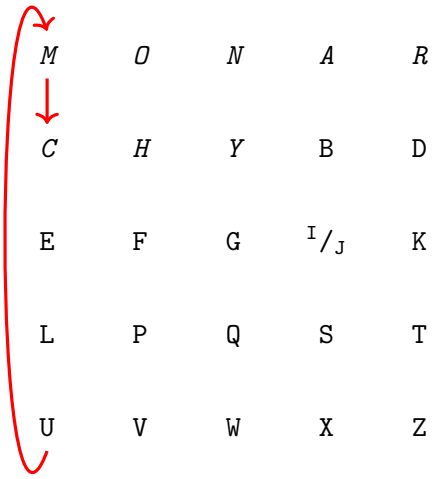
M	*O*	*N*	*A*	*R*
C	*H*	*Y*	B	D
E	F	G	I/J	K
L	P	Q	S	T
U	V	W	X	Z

Poi, il testo in chiaro viene cifrato due lettere alla volta, applicando regole diverse in base a dove tali lettere si trovano nella matrice:

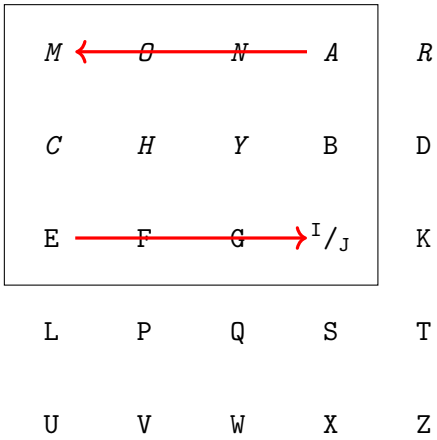
- Se entrambe le lettere ricadono nella *stessa riga*, si sostituisce ciascuna lettera con quella alla sua destra nella matrice (eventualmente ripartendo da sinistra, se si supera la fine di una riga). Ad esempio, il digramma `nr` viene cifrato come `AM`:



- Se entrambe le lettere ricadono nella *stessa colonna*, si sostituisce ciascuna lettera con quella sottostante nella matrice (eventualmente ripartendo da sopra, se si supera la fine di una colonna). Ad esempio, il digramma `mu` viene cifrato come `CM`:



- Se le due lettere non sono nella stessa riga né nella stessa colonna, allora costituiscono due vertici di una sottomatrice, e vengono sostituite con i vertici opposti. Più precisamente, ciascuna lettera viene sostituita con la lettera che si trova sulla sua stessa riga, ma nella colonna occupata dall'altra lettera. Ad esempio, il digramma `ea` viene cifrato come `IM` (o `JM`, visto che `I` e `J` sono considerate equivalenti):



- Se le due lettere sono uguali, si aggiunge al plaintext una lettera di riempimento prestabilita (ad esempio `x`) tra le due lettere, in modo da separarle in due digrammi. Ad esempio, la parola `balloon` viene suddivisa nei digrammi `ba lx lo on`.

Per la decifratura si eseguono semplicemente le operazioni inverse.

Rispetto alla cifratura monoalfabetica, Playfair ha principalmente il vantaggio di rendere più difficile l'analisi delle frequenze delle singole lettere (in pratica, serve una quantità maggiore di testo cifrato per poter ricavare informazioni significative da tale analisi), poiché ogni lettera ha più omofoni, scelti in base al digramma di appartenenza. Ad esempio, considerando la matrice mostrata sopra, la lettera `a` può essere sostituita con:

- `B`, se appartiene ad esempio al digramma `ab`, che viene sostituito con `BI` o `BJ`;
- `M`, ad esempio nel caso `al` → `MS`;
- `O`, ad esempio nel caso `ap` → `OS`;
- `N`, ad esempio nel caso `aw` → `NX`;
- `R`, ad esempio nel caso `ao` → `RN`.

Inoltre, la sicurezza è migliorata rispetto alla cifratura monoalfabetica perché le sostituzioni operano sui $26 \cdot 26 = 676$ possibili digrammi, invece che solo sulle 26 lettere dell'alfabeto, quindi individuare il digramma del plaintext corrispondente a un digramma del ciphertext è più difficile.

Tuttavia, Playfair mantiene ancora diverse informazioni sulla struttura del testo in chiaro.

4.2 Cifrario di Hill

Un altro esempio di poligramma è il **cifrario di Hill**, che si basa sulle **combinazioni lineari** e può operare su poligrammi di dimensione (numero di lettere) n arbitraria.

Innanzitutto, come per il cifrario di Cesare, per definire il cifrario di Hill è necessario rappresentare le lettere dell'alfabeto con i numeri da 0 a 25 (e poi tutti i calcoli verranno fatti modulo 26, in modo da ottenere sempre risultati compresi tra 0 e 25).

Per eseguire la cifratura di un poligramma del testo in chiaro, si calcolano le lettere del corrispondente poligramma cifrato come combinazioni lineari delle lettere del testo in chiaro. Ad esempio, per $n = 3$, date le tre lettere $p_1p_2p_3$ di un poligramma in chiaro, le lettere $c_1c_2c_3$ del corrispondente poligramma cifrato sono ottenute tramite le seguenti formule:

$$\begin{aligned} c_1 &= (k_{11}p_1 + k_{12}p_2 + k_{13}p_3) \bmod 26 \\ c_2 &= (k_{21}p_1 + k_{22}p_2 + k_{23}p_3) \bmod 26 \\ c_3 &= (k_{31}p_1 + k_{32}p_2 + k_{33}p_3) \bmod 26 \end{aligned}$$

Questi calcoli possono essere espressi come la moltiplicazione

$$C = K \cdot P \bmod 26$$

tra una matrice K di $n \times n$ coefficienti e un vettore P di n lettere del plaintext, che dà come risultato un vettore C di n lettere del ciphertext:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}}_{C} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}}_{K} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}}_{P} \bmod 26$$

I coefficienti della matrice K costituiscono la chiave.

La decifratura avviene mediante la *matrice inversa* K^{-1} di K:

$$K^{-1} \cdot C = K^{-1} \cdot K \cdot P = P \pmod{26}$$

Non tutte le matrici sono invertibili, quindi bisogna scegliere una chiave K che ammetta un'inversa.

Il vantaggio di questo metodo basato sulle combinazioni lineari è che ogni lettera di un poligramma cifrato dipende da *tutte le lettere* del corrispondente poligramma in chiaro: questa è una proprietà estremamente utile, quindi le combinazioni lineari vengono usate anche in schemi di cifratura più avanzati.

Tuttavia, usare *solo* le combinazioni lineari non è sufficiente a ottenere uno schema sicuro. Infatti, il cifrario di Hill può essere oggetto di attacchi known plaintext: se l'attaccante conosce abbastanza coppie di un poligramma in chiaro e il corrispondente poligramma cifrato, allora può facilmente determinare la chiave tramite la risoluzione un sistema di equazioni lineari o il calcolo dell'inversa di una matrice.