Azzolini Riccardo 2019-02-19

Numeri razionali e reali

1 Dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$

Si vuole dimostrare che $\nexists r \in \mathbb{Q}$ tale che $r = \sqrt{2} \iff r^2 = 2$.

Si suppone per assurdo che esista $r \in \mathbb{Q}$ tale che $r^2 = 2$. Sia $r > 0$ (per semplicità).

$$r = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N},\ q \neq 0$$

con p e q primi tra loro.

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \iff \frac{p^2}{q^2} = 2 \iff p^2 = 2q^2$$

cioè p^2 è pari, quindi anche p è pari, ovvero $p = 2m$ con $m \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} &\implies (2m)^2 = 2q^2 \\ &\iff 4m^2 = 2q^2 \\ &\implies q^2 = 2m^2 \end{aligned}$$

allora anche q^2, e di conseguenza q, è pari.

Ciò è assurdo perché si erano scelti p e q primi tra loro, ma se sono entrambi pari hanno in comune il fattore 2. $\square$

2 Cifre decimali

Un numero razionale si può sempre scrivere come numero decimale *limitato* (cioè con un numero finito di cifre) o *periodico*.

I numeri irrazionali, invece, hanno infinite cifre non periodiche.

Osservazione: $0.\overline{9} = 1$

3 Operazioni su $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$

L'insieme $\mathbb{Q}$ e l'insieme $\mathbb{R}$ hanno due operazioni (addizione e prodotto) che verificano le seguenti proprietà:

- **proprietà associativa**

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Q} \text{ (o } \mathbb{R}), \quad \begin{aligned} (x+y)+z &= x+(y+z) \\ (x \cdot y) \cdot z &= x \cdot (y \cdot z) \end{aligned}$$

- **proprietà commutativa**

$$\forall x, y \in \mathbb{Q} \text{ (o } \mathbb{R}), \quad \begin{aligned} x+y &= y+x \\ x \cdot y &= y \cdot x \end{aligned}$$

- **proprietà distributiva**

$$\forall x, y \in \mathbb{Q} \text{ (o } \mathbb{R}), \quad (x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

- $\exists!$ un **elemento neutro** per l'addizione (0) e per la moltiplicazione (1)

$$\forall x \in \mathbb{Q} \text{ (o } \mathbb{R}), \quad \begin{aligned} x+0 &= x \\ x \cdot 1 &= x \end{aligned}$$

- esistenza dell'**opposto** di ogni elemento

$$\forall x \in \mathbb{Q} \text{ (o } \mathbb{R}) \quad \exists! -x \in \mathbb{Q} \text{ (o } \mathbb{R}), \quad x + (-x) = 0$$

- esistenza dell'**inverso** (o **reciproco**) di ogni elemento, eccetto 0

$$\forall x \in \mathbb{Q} \text{ (o } \mathbb{R}) \text{ con } x \neq 0 \quad \exists! x^{-1} \in \mathbb{Q} \text{ (o } \mathbb{R}), \quad x + x^{-1} = 1$$

$\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ sono quindi **campi**.

4 Insiemi ordinati

Un insieme A è **ordinato** se $\forall x, y \in A$, se $x \leq y$ e $z \in A$ allora $x + z \leq y + z$. Inoltre, se $x \leq y$ e $z \geq 0$, allora $x \cdot z \leq y \cdot z$.

A è **totalmente ordinato** se $\forall x, y \in A$, o $x \leq y$ o $y \leq x$.

Osservazione: Se $x \leq y$ e $y \leq x$, allora $x = y$.

Gli insiemi numerici $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ sono totalmente ordinati.

5 Insiemi densi, continui e discreti

$\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ sono insiemi **densi** sulla retta orientata perché in ogni intervallo delimitato da due punti sulla retta ci sono infiniti numeri.

Ciò nonostante, i punti della retta non sono in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{Q}$. Lo sono invece con $\mathbb{R}$, che è quindi un insieme **continuo**. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, non essendo continui, si dicono invece insiemi **discreti**.

6 Proprietà dei numeri reali

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \exists \text{ infiniti } z \in \mathbb{Q}, \quad x < z < y$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \exists \text{ infiniti } z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad x < z < y$$

7 Intervalli

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

$$
\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \\
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \\
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\
[a,+\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} \\
(a,+\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x\} \\
(-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \\
(-\infty,b) &= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}
\end{aligned}
$$

$$
(-\infty,+\infty) = \mathbb{R} \qquad (0,+\infty) = \mathbb{R}^+ \qquad (-\infty,0) = \mathbb{R}^-
$$

8 Modulo

Il **modulo**, o **valore assoluto**, corrisponde alla distanza di un numero dall'origine (0) sulla retta orientata.

$$
|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}
$$

8.1 Proprietà

1. $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
   $|x| = 0 \iff x = 0$
2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
3. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \quad \forall x, y \in \mathbb{R},\, y \neq 0$
4. $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ (*disuguaglianza triangolare*)
5. Se $a > 0$, $|x| < a \iff -a < x < a$ e $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$.
6. Se $a > 0$, $|x| > a \iff x < -a \vee x > a$ e $|x| \geq a \iff x \leq -a \vee x \geq a$.
7. Se $n \in \mathbb{N}$ e $n \neq 0$, allora $\forall x, y \in \mathbb{R}$ si ha che $x^{2n} < y^{2n} \iff |x| < |y|$ e $x^{2n} \leq y^{2n} \iff |x| \leq |y|$, mentre $x^{2n+1} < y^{2n+1} \iff x < y$ e $x^{2n+1} \leq y^{2n+1} \iff x \leq y$.
8. $\sqrt{x^2} = |x|$

8.1.1 Dimostrazione della 5

$$|x| < a$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x < a \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ -x < a \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x < a \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ x > -a \end{cases}$$
$$0 \leq x < a \vee -a < x < 0$$

$$-a \leq x \leq a$$
$$x \in (-a, a)$$

8.1.2 Dimostrazione della 6

$$|x| > a$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x > a \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ -x > a \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x > a \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ x < -a \end{cases}$$
$$x > a \vee x < -a$$

$$x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$$