Azzolini Riccardo 2020-04-02

Insiemi di connettivi funzionalmente completi

1 Teorema fondamentale per le DNF

Teorema: Ogni formula A è equivalente a una formula H in DNF.

Dimostrazione: Data una formula A nelle variabili $p_1, \dots, p_n$, si può scrivere la sua tavola di verità, che, come visto in precedenza, rappresenta una funzione

$$f_A : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$$

Allora, in base al teorema di completezza funzionale per le DNF (e alla sua dimostrazione), esiste una DNF H, anch'essa nelle variabili $p_1, \dots, p_n$,[1] tale che $f_H = f_A$.

$f_H = f_A$ significa, in sostanza, che le tavole di verità delle formule A e H sono identiche, e quindi che, per ogni valutazione v, $v(A) = v(H)$, cioè che $A \equiv H$. $\square$

2 Teorema fondamentale per le CNF

Teorema: Ogni formula A è equivalente a una formula H in CNF.

La dimostrazione è analoga al teorema precedente, con la sola differenza che si usa il teorema di completezza funzionale relativo alle CNF, invece di quello per le DNF.

3 Esempio

Si vogliono costruire la DNF e la CNF corrispondenti alla formula

$$A = p \to (q \land \neg p)$$

La tavola di verità di A, che definisce implicitamente la funzione $f_A : \{0, 1\}^2 \to \{0, 1\}$, è:

[1] La dimostrazione del di completezza funzionale richiede solo che la formula H contenga n variabili proposizionali distinte, e non specifica quali debbano essere, quindi si è liberi di scegliere le stesse $p_1, \dots, p_n$ che contiene A.

p	q	$\neg p$	$q \wedge \neg p$	$p \to (q \wedge \neg p)$
0	0	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	0	0

Da essa, usando le definizioni / tecniche presentate nelle dimostrazioni dei teoremi di completezza funzionale, si costruiscono le seguenti forme normali:

$$\begin{array}{ll} \text{DNF} & (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \\ \text{CNF} & (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \end{array}$$

4 Numero di funzioni booleane

Il numero delle possibili funzioni booleane in n argomenti, $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, è

$$|\{0,1\}|^{|\{0,1\}^n|} = |\{0,1\}|^{|\{0,1\}|^n} = 2^{2^n}$$

(perché, in generale, se A e B sono insiemi finiti, $|\{f \mid f : A \to B\}| = |B|^{|A|}$).

Di conseguenza, poiché (come già detto) le funzioni booleane n-arie sono in corrispondenza biunivoca con le possibili tavole di verità su n variabili proposizionali, anche il numero di possibili tavole di verità distinte generate da n variabili proposizionali è 2^{2^n}.

In qualche modo, le possibili tavole di verità su n variabili proposizionali rappresentano tutte le possibili diverse semantiche di formule in n variabili proposizionali, o, in altre parole, le classi di equivalenza indotte dalla relazione di equivalenza logica (a meno dei nomi delle variabili proposizionali), che quindi sono anch'esse 2^{2^n}.

5 Tavole di verità per due variabili

La tavola di verità corrispondente a $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ può essere interpretata come la *definizione della semantica di un connettivo.*

Ad esempio, quella mostrata in seguito è la tavola di verità di una qualche formula $B \oplus C$, che dipende da due sottoformule B e C (le quali potrebbero essere variabili proposizionali, o anche formule arbitrarie[2]):

[2] Tavole di verità come questa, in cui si rappresenta una formula che dipende da delle sottoformule, sono già state usate per descrivere la semantica dei connettivi.

B	C	$B \oplus C$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Da questa tavola di verità, si osserva che la formula $B \oplus C$ vale 0 quando i valori delle sottoformule coincidono, e vale invece 1 quando i valori delle sottoformule sono diversi. Allora, si può definire un nuovo connettivo $\oplus$, descrivendone la semantica sulla base di ciò che accade in questa tavola:

$$\begin{aligned} v(B \oplus C) = 1 &\text{ sse } (v(B) = 1 \text{ e } v(C) = 0) \text{ o } (v(B) = 0 \text{ e } v(C) = 1) \\ &\text{ sse } v(B) \neq v(C) \end{aligned}$$

Questo connettivo è chiamato *XOR*, *or esclusivo*: mentre la disgiunzione (or), $B \vee C$, "restituisce" 1 anche quando entrambe le sottoformule hanno valore 1, qui si ottiene 1 solo quando esattamente uno dei due disgiunti vale 1.

Osservazione: Il procedimento appena fatto è l'opposto di quello che si era svolto in precedenza: per i connettivi $\wedge, \vee, \to$ (e $\neg$), si era prima definita la semantica in termini di valutazioni, e poi mostrata la tavola di verità risultante dall'applicazione di tale semantica. Qui, invece, si è partiti da una tavola di verità, per poi descrivere in termini di valutazioni la semantica da essa rappresentata.

Come visto prima, le possibili funzioni booleane in due variabili sono $2^{2^2} = 16$, quindi esistono 16 possibili connettivi binari, le cui tavole di verità sono le seguenti (qui mostrate in modo compatto):

		p	1	1	0	0
		q	1	0	1	0
1	falso	$\bot$	0	0	0	0
2	NOR, Pierce's dagger	$p \downarrow q$	0	0	0	1
3	contro-implicazione negata	$p \not\leftarrow q$	0	0	1	0
4	negazione	$\neg p$	0	0	1	1
5	implicazione negata	$p \not\to q$	0	1	0	0
6	negazione	$\neg q$	0	1	0	1
7	XOR	$p \oplus q$	0	1	1	0
8	NAND, Sheffer's stroke	$p \mid q$	0	1	1	1
9	congiunzione	$p \wedge q$	1	0	0	0
10	bi-implicazione	$p \leftrightarrow q$	1	0	0	1
11		q	1	0	1	0
12	implicazione	$p \to q$	1	0	1	1
13		p	1	1	0	0
14	contro-implicazione	$p \leftarrow q$	1	1	0	1
15	disgiunzione	$p \vee q$	1	1	1	0
16	vero	$\top$	1	1	1	1

In questa tabella sono presenti tutti i connettivi visti finora (e altri). In particolare, è presente anche la negazione: nonostante essa sia stata definita come un connettivo unario, può essere riportata su due variabili proposizionali semplicemente trascurando il valore di una delle due ($\neg p$ trascura il valore di q, e $\neg q$ trascura il valore di p).

5.1 Scelta dei connettivi del linguaggio

Tra tutti questi connettivi, si è scelto di inserire nel linguaggio i quattro $\neg, \wedge, \vee, \to$, perché questi sono i più "naturali" dal punto di vista del ragionamento usuale: di fatto, sono stati scelti "per comodità".

Allora, però, sorge il dubbio che questa scelta possa essere in qualche modo penalizzante, cioè che, per il fatto di non aver incluso altri connettivi, si perda la possibilità di rappresentare qualche cosa.

In realtà, questa è una domanda a cui si è già data una risposta: le semantiche di tutti i 16 possibili connettivi sono rappresentate da tavole di verità, e, grazie ai teoremi di completezza funzionale, ogni tavola di verità (funzione booleana) è a sua volta rappresentabile come una formula contenente solo i connettivi del linguaggio scelto; si dice che tutti i connettivi sono *derivabili* in tale linguaggio. Quindi, scegliendo questi connettivi e non altri, sicuramente non si ha alcuna perdita di semantica.

L'esistenza di questi 16 connettivi può far sorgere anche altre domande:

- Si potrebbe scegliere un insieme di connettivi diverso da $\{\neg, \wedge, \vee, \to\}$, senza perdere espressività (cioè conservando la completezza funzionale)?
- Esistono insiemi minimali o minimi di connettivi che preservano la completezza funzionale?

6 Insiemi completi di connettivi

Definizione: Un insieme di connettivi logici C è **funzionalmente completo** se, per ogni funzione booleana $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, esiste una formula H, contenente esclusivamente i connettivi in C, tale che $f_H = f$.

I teoremi di completezza funzionale affermano che ogni funzione booleana può essere rappresentata da una formula in DNF o in CNF, quindi l'insieme di connettivi $\{\neg, \wedge, \vee\}$, sul quale sono costruite entrambe queste forme normali, è funzionalmente completo. In questo modo, si vede che l'insieme di connettivi $\{\neg, \wedge, \vee, \to\}$, sul quale si è qui scelto di costruire il linguaggio della logica proposizionale classica, è "più grande del necessario".

Da qui, usando alcune equivalenze logiche introdotte in precedenza, si dimostra che ci sono insiemi completi ancora più piccoli:

- La congiunzione può essere ridefinita utilizzando esclusivamente disgiunzione e negazione,
$$A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$$
quindi si può trasformare una DNF H in una formula $K \equiv H$ che utilizza esclusivamente i connettivi $\{\neg, \vee\}$.

  Combinando questo fatto con il teorema di completezza funzionale, si ottiene che, per ogni funzione $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, esiste una formula K, contenente esclusivamente i connettivi in $\{\neg, \vee\}$, tale che $f_K = f$: $\{\neg, \vee\}$ è funzionalmente completo.

- Analogamente, la disgiunzione può essere riscritta usando soltanto negazione e congiunzione,
$$A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$$
quindi una CNF H può essere trasformata in una formula $K \equiv H$ che utilizza esclusivamente i connettivi $\{\neg, \wedge\}$.

  Così, sfruttando (come prima) il teorema di completezza funzionale, si dimostra che anche $\{\neg, \wedge\}$ è funzionalmente completo.

I due insiemi funzionalmente completi $\{\neg, \vee\}$ e $\{\neg, \wedge\}$ sono minimali, nel senso che, se si toglie uno dei loro connettivi, non si riescono più a rappresentare tutte le funzioni booleane. Tuttavia, il fatto che questi siano minimali *non* significa che non esistano altri insiemi funzionalmente completi più piccoli – e, infatti, tali insiemi esistono:

- quello che contiene il solo connettivo NOR: $\{\downarrow\}$;
- quello contenente solo NAND: $\{|\}$.

Ad esempio, si dimostra la completezza funzionale di $\{\downarrow\}$ osservando che NOR, la cui tavola di verità è

A	B	$A \downarrow B$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

può essere utilizzato per definire tutti gli altri connettivi, compresi quindi quelli dell'insieme funzionalmente completo $\{\neg, \wedge, \vee\}$:

$$\begin{aligned}
\neg A &\equiv A \downarrow A \\
A \wedge B &\equiv \neg A \downarrow \neg B \equiv (A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B) \\
A \vee B &\equiv \neg(A \downarrow B) \equiv (A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B)
\end{aligned}$$

Perciò, si può trasformare una formula in DNF o in CNF in una formula equivalente che contiene solo il connettivo $\downarrow$, e allora qualsiasi funzione booleana può essere rappresentata con solo $\downarrow$, ovvero $\{\downarrow\}$ è appunto funzionalmente completo.

La dimostrazione della completezza funzionale di $\{|\}$ è analoga.