Azzolini Riccardo 2020-06-03

Tableaux del primo ordine: completezza

1 Teorema di completezza

Si vuole dimostrare il seguente teorema:

Teorema (di completezza di $\mathrm{T}_{\mathrm{CFO}}$): Se un insieme finito di formule Γ è insoddisfacibile, allora esiste un tableau chiuso per Γ.

La struttura della dimostrazione ripercorre sostanzialmente quella del caso proposizionale, ma è un po' più complicata perché la gestione delle regole del primo ordine richiede l'introduzione di più aspetti tecnici.

2 Tableaux sistematici

Per dimostrare il teorema di completezza di $\mathrm{T}_{\mathrm{CFO}}$, è necessario introdurre una variante dei tableaux, i **tableaux sistematici**, che permetta, quando si sviluppa un ramo, di gestire in maniera "controllata" le costanti introdotte dalle γ-regole e dalle δ-regole.

La costruzione degli alberi di prova sistematici è una variante del metodo di costruzione di alberi di prova usato finora:

- Si applicano le γ-regole solo quando non ci sono altre regole da applicare.
- A ogni nodo N dell'albero di prova si associa, per ogni γ-formula $\varphi \in \Gamma_N$, un insieme di costanti $C_N(\varphi)$.
- Si trattano contemporaneamente tutte le γ-formule nell'insieme associato a un nodo N, applicando in un solo passo tutte le γ-regole possibili: ogni γ-formula φ viene istanziata per ciascuna delle costanti in $C_N(\varphi)$. Questo corrisponde ad "accumulare in un solo nodo" l'applicazione di una sequenza finita di γ-regole.

2.1 Terminologia

- Dato un nodo N dell'albero, si indica con $\mathcal{K}_N$ l'insieme dei simboli di costante che occorrono in Γ_N. Se Γ_N non contiene simboli di costante, si sceglie un nuovo simbolo di costante a e si pone $\mathcal{K}_N = \{a\}$.

- Un nodo N è **finale** se Γ_N contiene una coppia complementare, *oppure* contiene solo letterali e/o γ-formule φ per cui $C_N(\varphi) = \varnothing$.
- Un nodo N è un **γ-nodo** se contiene solo letterali e γ-formule, tra cui almeno una γ-formula φ con $C_N(\varphi) \neq \varnothing$.
- Un nodo è invece **ordinario** se non è né un nodo finale né un γ-nodo.

2.2 Processo di costruzione

La costruzione degli alberi di prova sistematici segue lo schema del procedimento già visto per gli alberi di prova "normali", partendo da un nodo radice $\mathcal{T}_0$ e generando una sequenza di alberi $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n, \ldots$ mediante l'applicazione iterativa di un passo di espansione.

- $\mathcal{T}_0$ è l'albero che consiste del solo nodo radice N, con etichetta $\Gamma_N = \Gamma$. L'insieme delle costanti associate a ciascuna γ-formula è posto uguale all'insieme di tutte le costanti del nodo:
$$C_N(\varphi) = \mathcal{K}_N \quad \widetilde{\forall}\ \gamma\text{-formula } \varphi \in \Gamma_N$$
- Se $\mathcal{T}_i$ contiene una foglia che è un nodo ordinario, si seleziona una tale foglia N, si seleziona una formula $H \in \Gamma_N$ a cui sia applicabile la regola $\neg\neg$, un'α-regola, una β-regola oppure una δ-regola, e si genera $\mathcal{T}_{i+1}$ mediante il passo di espansione $\text{Espandi}(\mathcal{T}_i, N, H)$, definito sostanzialmente come nel caso degli alberi non sistematici, con la differenza che è necessario trattare le costanti associate alle γ-formule.
- Se $\mathcal{T}_i$ non contiene foglie ordinarie, ma contiene almeno una foglia che è un γ-nodo, l'albero $\mathcal{T}_{i+1}$ è generato dal passo di espansione $\gamma\text{-Espandi}(\mathcal{T}_i, N)$, corrispondente all'applicazione di tutte le possibili γ-regole a Γ_N.
- Se tutte le foglie di $\mathcal{T}_i$ sono nodi finali, la costruzione termina.

Nota: L'albero sistematico è solo quello ottenuto alla "fine" di questo procedimento iterativo (potenzialmente infinito), nel quale ogni ramo o è infinito oppure ha una foglia finale. Non si considerano invece alberi sistematici i $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n, \ldots$ "intermedi" generati durante il processo di costruzione.

2.3 Passo di espansione: $\neg\neg$, α-formula, β-formula

Nei casi in cui si applica la regola $\neg\neg$, un'α-regola o una β-regola, per quanto riguarda la costruzione dei nodi il passo di espansione $\text{Espandi}(\mathcal{T}_i, N, H)$ è definito come per gli alberi non sistematici:

- Se $H = \neg\neg A$, si aggiunge a N un figlio N' con

$$\Gamma_{N'} = (\Gamma_N \setminus \{\neg\neg A\}) \cup \{A\}$$

- Se H è un'α-formula con ridotti H_1 e H_2, si aggiunge un figlio N' con

$$\Gamma_{N'} = (\Gamma_N \setminus \{H\}) \cup \{H_1, H_2\}$$

- Se H è una β-formula con ridotti H_1 e H_2, si aggiungono due figli N' e N'' con

$$\Gamma_{N'} = (\Gamma_N \setminus \{H\}) \cup \{H_1\} \qquad \Gamma_{N''} = (\Gamma_N \setminus \{H\}) \cup \{H_2\}$$

Per quanto riguarda invece le costanti, siccome il passo di espansione non ne introduce di nuove:

- tutte le γ-formule già presenti nel nodo N mantengono le stesse costanti associate anche in N' (e N'');
- alle eventuali nuove γ-formule in N' (N''), generate come ridotti della formula a cui si è applicata una regola, si associa l'insieme di costanti di N (che sono le stesse presenti anche nei figli, non avendone introdotte di nuove).

$$\widetilde{\forall}\ \gamma\text{-formula } \varphi \in \Gamma_{N'} \quad C_{N'}(\varphi) = \begin{cases} C_N(\varphi) & \text{se } \varphi \in \Gamma_N \\ \mathcal{K}_N & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(e analogamente per N').

Osservazione: Nel caso di una γ-formula $\varphi \in \Gamma_N$, non è detto che sia $C_N(\varphi) = \mathcal{K}_N$, perché (come si vedrà successivamente) l'insieme $C_N(\varphi)$ contiene solo le costanti per le quali φ non è stata ancora istanziata, e potrebbe essere che essa sia invece già stata istanziata per alcune delle costanti di $\mathcal{K}_N$ in qualche passo precedente.

2.4 Passo di espansione: δ-formula

Anche quando H è una δ-formula, Espandi$(\mathcal{T}_i, N, H)$ costruisce un nuovo nodo come nel caso degli alberi non sistematici: se K è un ridotto di H costruito rispetto al parametro b, si aggiunge a N un figlio N' con

$$\Gamma_{N'} = (\Gamma_N \setminus \{H\}) \cup \{K\}$$

Il parametro b introdotto dalla δ-regola è una nuova costante che potrà successivamente essere usata per istanziare le γ-formule. Bisogna quindi aggiungerlo agli insiemi di costanti associati alle γ-formule:

$$\widetilde{\forall}\ \gamma\text{-formula } \varphi \in \Gamma_{N'} \quad C_{N'}(\varphi) = \begin{cases} C_N(\varphi) \cup \{b\} & \text{se } \varphi \in \Gamma_N \\ \mathcal{K}_N \cup \{b\} = \mathcal{K}_{N'} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2.5 Passo di espansione: γ-formula

Siano $H_1, \dots, H_n$ tutte le γ-formule in Γ_N, e siano

$$C_N(H_1) = \{c_1^1, \dots, c_{m_1}^1\},\ \dots,\ C_N(H_n) = \{c_1^n, \dots, c_{m_n}^n\}$$

i rispettivi insiemi di costanti associati a esse nel nodo N (alcuni di questi insiemi possono essere vuoti, ma non tutti, altrimenti N non sarebbe un γ-nodo, e quindi non si applicherebbe la γ-espansione).

Siano poi:

- $K_1^1, \dots, K_{m_1}^1$ i ridotti di H_1 rispetto alle costanti $\{c_1^1, \dots, c_{m_1}^1\}$
- ecc.
- $K_1^n, \dots, K_{m_n}^n$ i ridotti di H_n rispetto alle costanti $\{c_1^n, \dots, c_{m_n}^n\}$

Allora, $\mathcal{T}_{i+1} = \gamma\text{-Espandi}(\mathcal{T}_i, N)$ si costruisce aggiungendo un nodo N' come successore (figlio) di N, e ponendo:

$$\Gamma_{N'} = \Gamma_N \cup \{K_1^1, \dots, K_{m_1}^1\} \cup \dots \cup \{K_1^n, \dots, K_{m_n}^n\}$$

Osservazione: Γ_N viene copiato senza togliere le γ-formule, poiché le γ-regole riportano nella conclusione la formula alla quale si applicano.

Siccome ogni γ-formula in N è stata istanziata con tutte le costanti dell'insieme associato a essa (in N), nel nodo N' tale insieme viene "svuotato":

$$\widetilde{\forall}\ \gamma\text{-formula } \varphi \in \Gamma_{N'} \quad C_{N'}(\varphi) = \begin{cases} \varnothing & \text{se } \varphi \in \Gamma_N \\ \mathcal{K}_N & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Come al solito, l'applicazione delle regole potrebbe generare nuove γ-formule, alle quali vengono associate tutte le costanti che occorrono in N (le stesse che occorrono anche in N', dato che non se ne sono aggiunte altre).

2.5.1 Esempio

Si suppone di aver costruito un γ-nodo N,

$$\Gamma_N = \Delta \cup \{\forall x A\} \cup \{\forall x B\}$$

contenente due γ-formule alle quali sono associati insiemi di costanti non vuoti,

$$C_N(\forall x A) = \{a, b, c\} \qquad C_N(\forall x B) = \{d, e\}$$

(mentre Δ contiene letterali e/o γ-formule φ con $C_N(\varphi) = \varnothing$, perché N è appunto un γ-nodo).

Allora, il nodo figlio N' contiene le formule

$$\Gamma_{N'} = \Delta \cup \{\forall x A, A[a/x], A[b/x], A[c/x]\} \cup \{\forall x B, B[d/x], B[e/x]\}$$

mentre gli insiemi di costanti associati sono:

$$C_{N'}(\forall x A) = \varnothing \qquad C_{N'}(\forall x B) = \varnothing$$

In pratica, porre $C_{N'}(\forall x A) = \varnothing$ equivale a dire: "i casi relativi alle costanti $\{a, b, c\}$ sono stati considerati, non serve riconsiderarli in futuro" (e analogamente per $C_{N'}(\forall x B) = \varnothing$).

Come detto prima, la costruzione di $\Gamma_{N'}$ corrisponde all'applicazione di una sequenza di γ-regole:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Delta, \forall x A, \forall x B}{\Delta, \forall x A, A[a/x], \forall x B}\,\forall}{\Delta, \forall x A, A[a/x], A[b/x], \forall x B}\,\forall}{\Delta, \forall x A, A[a/x], A[b/x], A[c/x], \forall x B}\,\forall}{\Delta, \forall x A, A[a/x], A[b/x], A[c/x], \forall x B, B[d/x]}\,\forall}{\Delta, \forall x A, A[a/x], A[b/x], A[c/x], \forall x B, B[d/x], B[e/x]}\,\forall$$

2.6 Esempio di costruzione

Per la formula

$$\neg(\forall x \neg P(x) \to \neg \exists x P(x))$$

si costruisce il seguente tableau sistematico:

$$\begin{array}{lll}
N_0\colon \neg(\forall x \neg P(x) \to \neg \exists x P(x)) & & \\
\quad\big|\ \neg\to & & \\
N_1\colon \underbrace{\forall x \neg P(x)}_{\varphi}, \neg\neg\exists x P(x) & & C_{N_1}(\varphi) = \{a\} \\
\quad\big|\ \neg\neg & & \\
N_2\colon \forall x \neg P(x), \exists x P(x) & & C_{N_2}(\varphi) = \{a\} \\
\quad\big|\ \exists & & \\
N_3\colon \forall x \neg P(x), P(b) & & C_{N_3}(\varphi) = \{a, b\} \\
\quad\big|\ \gamma\text{-Espandi} & & \\
N_4\colon \forall x \neg P(x), \neg P(a), \neg P(b), P(b) & & C_{N_4}(\varphi) = \varnothing
\end{array}$$

2.7 Esempio di ramo infinito

Si vuole costruire un tableau sistematico avente alla radice la γ-formula

$$\varphi = \forall x \exists y P(x, y)$$

1. Poiché nel nodo radice N_0 non occorre alcuna costante, se ne sceglie una nuova c_1, e si pone $C_{N_0}(\varphi) = \mathcal{K}_{N_0} = \{c_1\}$.

$$N_0 \colon \varphi = \forall x \exists y P(x, y) \quad C_{N_0}(\varphi) = \{c_1\}$$

2. N_0 è un γ-nodo contenente una sola γ-formula, alla quale è associata una singola costante. Dunque, il passo di γ-espansione genera un solo ridotto, ovvero equivale ad applicare una singola γ-regola:

$$\begin{array}{cl}
N_0 \colon \varphi = \forall x \exists y P(x, y) & C_{N_0}(\varphi) = \{c_1\} \\
\big| \;\gamma\text{-Espandi} & \\
N_1 \colon \forall x \exists y P(x, y), \exists y P(c_1, y) & C_{N_1}(\varphi) = \varnothing
\end{array}$$

3. N_1 è un nodo ordinario, perché contiene una δ-formula. Si opera allora su quest'ultima, introducendo un nuovo simbolo di costante c_2, che viene aggiunta alle costanti associate a φ:

$$\begin{array}{cl}
N_0 \colon \varphi = \forall x \exists y P(x, y) & C_{N_0}(\varphi) = \{c_1\} \\
\big| \;\gamma\text{-Espandi} & \\
N_1 \colon \forall x \exists y P(x, y), \exists y P(c_1, y) & C_{N_1}(\varphi) = \varnothing \\
\big| \;\exists & \\
N_2 \colon \forall x \exists y P(x, y), P(c_1, c_2) & C_{N_2}(\varphi) = \{c_2\}
\end{array}$$

4. Grazie alla nuova costante c_2, N_2 è di nuovo un γ-nodo, la cui γ-espansione genera ancora un solo ridotto:

$$\begin{array}{cl}
N_0 \colon \varphi = \forall x \exists y P(x, y) & C_{N_0}(\varphi) = \{c_1\} \\
\big| \;\gamma\text{-Espandi} & \\
N_1 \colon \forall x \exists y P(x, y), \exists y P(c_1, y) & C_{N_1}(\varphi) = \varnothing \\
\big| \;\exists & \\
N_2 \colon \forall x \exists y P(x, y), P(c_1, c_2) & C_{N_2}(\varphi) = \{c_2\} \\
\big| \;\gamma\text{-Espandi} & \\
N_3 \colon \forall x \exists y P(x, y), P(c_1, c_2), \exists y P(c_2, y) & C_{N_3}(\varphi) = \varnothing
\end{array}$$

5. Si ottiene nuovamente un nodo ordinario N_3, contenente una δ-formula che si tratta introducendo una nuova costante c_3:

$$
\begin{array}{cl}
N_0\colon \varphi = \forall x \exists y P(x,y) & C_{N_0}(\varphi) = \{c_1\} \\
\Big| \ \gamma\text{-Espandi} & \\
N_1\colon \forall x \exists y P(x,y), \exists y P(c_1,y) & C_{N_1}(\varphi) = \varnothing \\
\Big| \ \exists & \\
N_2\colon \forall x \exists y P(x,y), P(c_1,c_2) & C_{N_2}(\varphi) = \{c_2\} \\
\Big| \ \gamma\text{-Espandi} & \\
N_3\colon \forall x \exists y P(x,y), P(c_1,c_2), \exists y P(c_2,y) & C_{N_3}(\varphi) = \varnothing \\
\Big| \ \exists & \\
N_4\colon \forall x \exists y P(x,y), P(c_1,c_2), P(c_2,c_3) & C_{N_4}(\varphi) = \{c_3\}
\end{array}
$$

6. La costruzione di quest'albero va avanti all'infinito,

$$
\begin{array}{cl}
N_0\colon \varphi = \forall x \exists y P(x,y) & C_{N_0}(\varphi) = \{c_1\} \\
\Big| \ \gamma\text{-Espandi} & \\
N_1\colon \forall x \exists y P(x,y), \exists y P(c_1,y) & C_{N_1}(\varphi) = \varnothing \\
\Big| \ \exists & \\
N_2\colon \forall x \exists y P(x,y), P(c_1,c_2) & C_{N_2}(\varphi) = \{c_2\} \\
\Big| \ \gamma\text{-Espandi} & \\
N_3\colon \forall x \exists y P(x,y), P(c_1,c_2), \exists y P(c_2,y) & C_{N_3}(\varphi) = \varnothing \\
\Big| \ \exists & \\
N_4\colon \forall x \exists y P(x,y), P(c_1,c_2), P(c_2,c_3) & C_{N_4}(\varphi) = \{c_3\} \\
\vdots & \\
N'\colon \forall x \exists y P(x,y), P(c_1,c_2), P(c_2,c_3), \ldots, P(c_{n-1},c_n) & C_{N'}(\varphi) = \{c_n\} \\
\vdots &
\end{array}
$$

perché a ogni passo non si ha mai un nodo finale.

2.8 Tableaux sistematici chiusi

Definizioni:

- Un *ramo di un tableaux sistematico* è **chiuso** se è finito e la sua foglia contiene una coppia complementare.
- Un *tableau* per Γ è **chiuso** se ogni suo ramo è chiuso.
- Un *ramo di un tableau sistematico* è **aperto** se non è chiuso (il che significa che può essere infinito, oppure finito con una foglia non contenente coppie complementari).
- Un *tableau* per Γ è **aperto** se ha almeno un ramo aperto.

3 Insiemi di Hintikka

Definizione: Un insieme di formule chiuse Γ[1] nel quale compare almeno un simbolo di costante è un **insieme di Hintikka** (**H-set**) se:

- non contiene coppie complementari;
- se $\neg\neg\varphi \in \Gamma$ allora $\varphi \in \Gamma$;
- se $\varphi \in \Gamma$, e φ è un'α-formula con ridotti φ_1 e φ_2, allora $\varphi_1, \varphi_2 \in \Gamma$;
- se $\varphi \in \Gamma$, e φ è una β-formula con ridotti φ_1 e φ_2, allora $\varphi_1 \in \Gamma$ o $\varphi_2 \in \Gamma$;
- se $\varphi \in \Gamma$, e φ è una γ-formula, allora, per ogni simbolo di costante c che occorre in Γ, Γ contiene il ridotto di φ relativo a c;
- se $\varphi \in \Gamma$, e φ è una δ-formula, allora Γ contiene almeno un ridotto di φ.

3.1 Esempio

L'insieme

$$\Gamma = \begin{Bmatrix} \forall x(P(a) \to Q(a,x)), P(b) \land Q(a,b), P(b), Q(a,b), \\ P(a) \to Q(a,b), P(a) \to Q(a,a), \neg P(a) \end{Bmatrix}$$

è un H-set relativamente all'insieme di costanti $C = \{a, b\}$, perché:

- contiene la γ-formula $\forall x(P(a) \to Q(a,x))$, e i suoi ridotti rispetto a entrambe le costanti, $P(a) \to Q(a,a)$ e $P(b) \to Q(a,b)$;
- contiene l'α-formula $P(b) \land Q(a,b)$ ed entrambi i suoi ridotti $P(b)$ e $Q(a,b)$;
- contiene le β-formule $P(a) \to Q(a,a)$ e $P(b) \to Q(a,b)$, e anche almeno uno dei ridotti di ciascuna di esse, $\neg P(a)$;
- non contiene coppie complementari.

3.2 Soddisfacibilità

Lemma: Se Γ è un insieme di Hintikka, allora è soddisfacibile.

Dimostrazione: Sia Γ un insieme di Hintikka, e sia D l'insieme delle costanti presenti in Γ. D deve essere non vuoto: se Γ non contiene costanti, si pone $D = \{c\}$, dove c è un nuovo simbolo di costante scelto arbitrariamente.

Per la dimostrazione nel caso proposizionale, si era costruita una valutazione a partire dai letterali presenti in Γ. Qui l'idea è la stessa, ma bisogna costruire una struttura più complessa – un modello, costituito da un dominio e un'interpretazione. Si considera

[1] L'insieme può anche essere infinito.

allora il modello $\mathcal{M} = (D, I)$, nel quale il dominio D è lo stesso insieme delle costanti presenti in Γ, e l'interpretazione I è tale che:

- per ogni costante c, $I(c) = c$;
- per ogni predicato $P^{(n)}$, $I(P) = \{(c_1, \dots, c_n) \in D^n \mid P(c_1, \dots, c_n) \in \Gamma\}$.

Adesso, si dimostra che il modello appena definito soddisfa Γ, $\mathcal{M} \models \Gamma$, ovvero che

$$\widetilde{\forall} H \in \Gamma \quad \mathcal{M} \models H$$

procedendo per induzione sul rango di H.

- *Base*: Se $\text{rg}(H) = 1$, per la definizione di rango, H è un letterale, cioè $H = P(c_1, \dots, c_n)$ o $H = \neg P(c_1, \dots, c_n)$.
  - Se $H = P(c_1, \dots, c_n) \in \Gamma$ allora, per definizione di $\mathcal{M}$, $(c_1, \dots, c_n) \in I(P)$, che significa $\mathcal{M} \models P(c_1, \dots, c_n)$.
  - Se invece $H = \neg P(c_1, \dots, c_n)$, allora $P(c_1, \dots, c_n) \notin \Gamma$, dato che Γ non contiene coppie complementari. Di conseguenza, per definizione di $\mathcal{M}$:

    $$(c_1, \dots, c_n) \notin I(P) \implies \mathcal{M} \not\models P(c_1, \dots, c_n) \implies \mathcal{M} \models \neg P(c_1, \dots, c_n)$$

- *Ipotesi induttiva*: $\widetilde{\forall} K \in \Gamma$ tale che $\text{rg}(K) \leq h$, $\mathcal{M} \models K$.
- *Passo induttivo*: Sia $H \in \Gamma$ tale che $\text{rg}(H) = h + 1$. Si procede per casi sulla forma di H.
  - I casi in cui $H = \neg\neg K$, H è un'α-formula, e H è una β-formula sono analoghi al proposizionale.
  - Se H è una γ-formula, ad esempio $H = \forall x K$ (il caso $H = \neg\exists x K$ è analogo), allora, essendo Γ un insieme di Hintikka, per ogni $c \in D$ si ha $K[c/x] \in \Gamma$.

    Siccome $\text{rg}(K[c/x]) < \text{rg}(\forall x K)$, si può applicare l'ipotesi induttiva, dalla quale si deduce che, per ogni simbolo di costante c in Γ, ovvero per ogni $c \in D$, $\mathcal{M} \models K[c/x]$. Ma, per definizione di $\mathcal{M}$, $I(c) = c$, quindi questo equivale a scrivere

    $$\widetilde{\forall} c \in D \quad (\mathcal{M}, [c/x]) \models K$$

    che vuol dire $\mathcal{M} \models \forall x K$.
  - Se H è una δ-formula, ad esempio $H = \exists x K$ (il caso $H = \neg\forall x K$ è analogo), per la definizione di H-set esiste $c \in D$ tale che $K[c/x] \in \Gamma$.

    Dato che $\text{rg}(K[c/x]) < \text{rg}(\exists x K)$, dall'ipotesi induttiva si ricava

    $$\widetilde{\exists} c \in D \quad \mathcal{M} \models K[c/x]$$

che, per $I(c) = c$, equivale a

$$\widetilde{\exists} c \in D \quad (\mathcal{M}, [c/x]) \models K$$

ovvero $\mathcal{M} \models \exists x K$.

3.2.1 Esempio

Dato l'H-set dell'esempio precedente,

$$\Gamma = \begin{Bmatrix} \forall x(P(a) \to Q(a,x)), P(b) \land Q(a,b), P(b), Q(a,b), \\ P(a) \to Q(a,b), P(a) \to Q(a,a), \neg P(a) \end{Bmatrix}$$

si costruisce il modello $\mathcal{M} = (D, I)$ dove:

- il dominio è l'insieme di costanti $D = \{a, b\}$;
- $I(a) = a$ e $I(b) = b$;
- $I(P) = \{b\}$ perché l'unica formula atomica ottenuta istanziando il predicato P che è contenuta in Γ è $P(b)$;
- $I(Q) = \{(a, b)\}$.

Si verifica allora che $\mathcal{M}$ rende vere tutte le formule in Γ,

$$\begin{aligned} b \in I(P) &\implies \mathcal{M} \models P(b) \\ (a,b) \in I(Q) &\implies \mathcal{M} \models Q(a,b) \\ a \notin I(P) \implies \mathcal{M} \not\models P(a) &\implies \mathcal{M} \models \neg P(a) \\ \mathcal{M} \models P(b) \text{ e } \mathcal{M} \models Q(a,b) &\implies \mathcal{M} \models P(b) \land Q(a,b) \\ \mathcal{M} \not\models P(a) &\implies \mathcal{M} \models P(a) \to Q(a,a) \\ \mathcal{M} \not\models P(a) &\implies \mathcal{M} \models P(a) \to Q(a,b) \\ \mathcal{M} \models P(a) \to Q(a,a) \text{ e } \mathcal{M} \models P(a) \to Q(a,b) & \\ \implies \widetilde{\forall} c \in D \quad (\mathcal{M}, [c/x]) \models P(a) \to Q(a,x) &\implies \mathcal{M} \models \forall x(P(a) \to Q(a,x)) \end{aligned}$$

e quindi $\mathcal{M} \models \Gamma$.

4 Rami di un tableau

Definizione: Sia $\mathcal{T}$ un albero di prova (sistematico o meno) per un insieme finito di formule Γ. Un **ramo** di $\mathcal{T}$ è una sequenza $\rho = N_1, \dots, N_k, \dots$ di nodi di $\mathcal{T}$ (eventualmente infinita, a differenza del caso proposizionale) tale che:

- N_1 è la radice di $\mathcal{T}$;

- $\widetilde{\forall} i = 1, \dots, k-1$, N_{i+1} è un successore diretto (figlio) di N_i.

Definizione: L'**insieme delle formule associato a un ramo** $\rho = N_1, \dots, N_k, \dots$ è

$$\Delta_\rho = \bigcup_{N \in \{N_1, \dots, N_k, \dots\}} \Gamma_N$$

cioè l'unione degli insiemi di formule associati ai nodi del ramo.

Osservazione: Siccome il ramo ρ può essere infinito, anche l'insieme Δ_ρ è potenzialmente infinito.

5 Proprietà sulle formule in un ramo

Proposizione: Sia $\rho = N_1, \dots, N_k, \dots$ un ramo di un tableau $\mathcal{T}$, e sia $H \in \Delta_\rho$. Valgono le seguenti proprietà:

1. Se H è un letterale e compare in un certo nodo N_i, $H \in \Gamma_{N_i}$ (con $i \geq 1$), allora $H \in \Gamma_{N_k}$ per ogni $k \geq i$.

   Intuitivamente, quando si sviluppa un tableau, una volta introdotto un letterale lo si ritrova anche in tutti i nodi successivi (compresa in particolare la foglia del ramo, se esso è finito).

2. Se H non è un letterale né una γ-formula, allora:
   - o esiste nel ramo un nodo finale N' (che sarà la foglia del ramo) per cui $H \in \Gamma_{N'}$,[2]
   - oppure esiste un nodo in cui la formula viene scomposta, cioè, formalmente, esiste un indice $i \geq 1$ tale che $H \in \Gamma_{N_i}$, $H \notin \Gamma_{N_{i+1}}$, e N_{i+1} è ottenuto da N_i scomponendo H (ovvero $\Gamma_{N_{i+1}}$ è una delle conclusioni della regola con premessa Γ_{N_i} in cui H è la formula principale).

La dimostrazione, che qui non viene data, avviene guardando come operano le regole, in modo abbastanza simile al caso proposizionale.

[2] Ciò è possibile solo se N' è finale perché contiene una coppia complementare. Infatti, l'altra condizione per cui un nodo può essere finale è che esso contenga solo letterali e/o γ-formule senza costanti associate, ma qui, per ipotesi, H non è né un letterale né una γ-formula.

5.1 Corollario: coppie complementari

Corollario: Se ρ è un ramo aperto, allora Δ_ρ non contiene coppie complementari.

Infatti, se Δ_ρ contenesse una coppia complementare:

- Se tale coppia fosse formata da letterali, per la proposizione precedente essi dovrebbero prima o poi essere presenti entrambi in uno stesso nodo, che renderebbe chiuso il ramo.
- Se la coppia fosse invece di formule composte, si potrebbe dimostrare che, applicando le regole, si otterrebbe eventualmente una coppia complementare di letterali; per lo stesso ragionamento di prima, questi ultimi sarebbero presenti in uno stesso nodo, e quindi il ramo risulterebbe ancora chiuso.

6 Rami aperti e H-set

Lemma: Sia $\rho = N_1, \ldots, N_k, \ldots$ un ramo *aperto* (eventualmente infinito) di un tableau sistematico. Allora, Δ_ρ è un insieme di Hintikka.

Dimostrazione:

- Δ_ρ non contiene coppie complementari in quanto ρ è aperto.
- Le proprietà degli insiemi di Hintikka che riguardano i connettivi proposizionali si dimostrano appunto come nel caso proposizionale.
- Se $H \in \Delta_\rho$ è una δ-formula, allora, per la proposizione precedente, esiste un nodo N_{i+1} costruito applicando a N_i la regola corrispondente ad H, dunque $\Gamma_{N_{i+1}}$, e quindi anche Δ_ρ (in quanto $\Gamma_{N_{i+1}} \subseteq \Delta_\rho$), contiene un ridotto di H.
- Se $H \in \Delta_\rho$ è una γ-formula, sia c una qualunque costante che occorre in Δ_ρ, e sia N_i il primo nodo per cui sia c che H compaiono in Γ_{N_i}. Per costruzione del ramo dell'albero sistematico, si ha che $c \in C_{N_i}(H)$.

  Proseguendo nello sviluppo del ramo, a un certo punto si raggiunge sicuramente un γ-nodo, perché tutti gli altri tipi di formule composte in N_i vengono prima o poi scomposte dall'applicazione delle corrispondenti regole (e il ramo non termina prima di averle scomposte tutte poiché, per l'ipotesi che il ramo sia aperto, non ci sono coppie complementari).

  Sia allora N_k il primo γ-nodo che occorre dopo N_i. Sempre per costruzione dell'albero sistematico, si ha ancora che $c \in C_{N_k}(H)$, e dunque il ridotto di H corrispondente a c compare in $\Gamma_{N_{k+1}} \subseteq \Delta_\rho$.

  Tutto questo ragionamento vale per ogni costante che occorre in Δ_ρ, quindi esso dimostra che Δ_ρ contiene i ridotti di H rispetto a tutte le costanti in Δ_ρ, completando così la dimostrazione del lemma.

7 Dimostrazione del teorema di completezza

Teorema (di completezza di $\mathrm{T}_{\mathrm{CFO}}$): Se un insieme finito di formule Γ è insoddisfacibile, allora esiste un tableau chiuso per Γ.

Dimostrazione: Innanzitutto, si osserva che esiste sempre almeno un tableau (e, in particolare, un tableau sistematico), eventualmente infinito, per Γ – come caso limite, se non ci sono regole da applicare alle formule di Γ, l'albero formato dalla sola radice è già un tableau (anche sistematico).

Si assume che non esista un tableau chiuso per Γ, e si considera invece un tableau sistematico aperto $\mathcal{T}$ per Γ. Sia allora $\rho = N_1, \dots, N_k, \dots$ un suo ramo aperto (eventualmente infinito). Si è dimostrato che Δ_ρ è un insieme di Hintikka, e perciò è soddisfacibile. Siccome $\Gamma \subseteq \Delta_\rho$, anche Γ è soddisfacibile, contro l'ipotesi che non lo fosse.

Si deduce così che, se Γ è insoddisfacibile, ogni tableau sistematico per Γ è chiuso, dunque esiste almeno un tableau chiuso per Γ.

8 Linguaggi con simboli di funzione

Finora, per semplicità, si sono considerati solo tableaux per linguaggi privi di simboli di funzione. Per estendere i tableaux a linguaggi con simboli di funzione, bisogna modificare le γ-regole:

$$\frac{\Gamma, \forall x A}{\Gamma, \forall x A, A[t/x]}\,\forall \qquad \frac{\Gamma, \neg\exists x A}{\Gamma, \neg\exists x A, \neg A[t/x]}\,\neg\exists$$

esse devono introdurre ridotti rispetto ad arbitrari termini chiusi t, invece che solo rispetto a simboli di costante c.

Le regole di chiusura dei rami e gli asserti dei teoremi rimangono invariati, mentre le dimostrazioni richiedono alcuni adattamenti.

9 Tableaux per la conseguenza logica

Esattamente come per la logica proposizionale, si possono usare i tableaux anche per studiare la conseguenza logica (invece che la validità / soddisfacibilità di una formula):

$$\begin{aligned}\Gamma \models \varphi &\iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ è insoddisfacibile}\\ &\iff \text{esiste un tableau chiuso per } \Gamma \cup \{\neg\varphi\}\end{aligned}$$