Azzolini Riccardo 2019-02-26

Funzioni

1 Funzione inversa

Sia $f : X \to f(X)$, cioè una funzione suriettiva. Se f è anche iniettiva, e di conseguenza biiettiva, allora è **invertibile**,

$$\forall y \in f(x) \quad \exists! x \in X \text{ tale che } f(x) = y$$

quindi esiste una funzione

$$\begin{aligned} f^{-1} : f(X) &\to X \\ y &\to x \quad \text{tale che } f(x) = y \end{aligned}$$

chiamata **funzione inversa** di f.

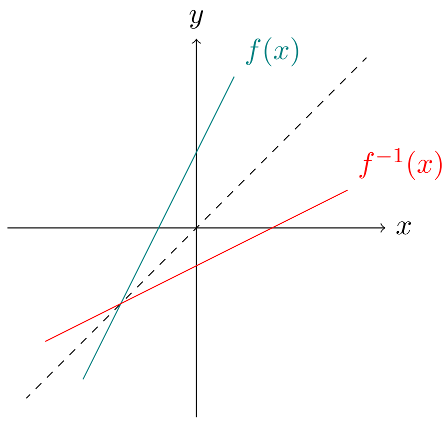
Entrambe le composizioni di f e f^{-1} corrispondono alla funzione identità:

$$f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$$

1.1 Esempi

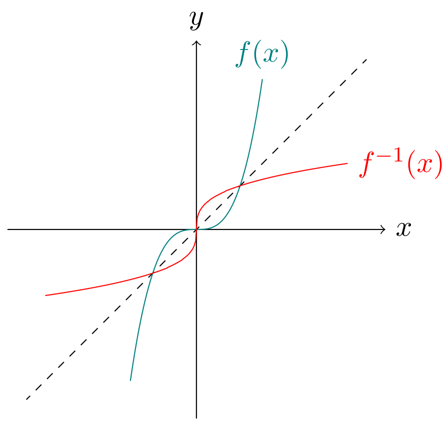
- $f(x) = 2x + 1 \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  è biiettiva, e quindi invertibile:

$$\begin{aligned} y &= 2x + 1 \\ x &= \frac{y-1}{2} \implies f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2} \end{aligned}$$



- $f(x) = 3x^3 \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è biiettiva, quindi invertibile:

$$\begin{aligned} y &= 3x^3 \\ x^3 &= \frac{y}{3} \\ x &= \sqrt[3]{\frac{y}{3}} \implies f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{3}} \end{aligned}$$



- $f(x) = x^2 \quad f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$
  non è invertibile.

  Si può ottenere una funzione invertibile restringendo il dominio a $[0, +\infty)$:

$$\begin{aligned} f : [0, +\infty) &\to [0, +\infty) \\ x &\to x^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y &= x^2 \\
\sqrt{x^2} &= \sqrt{y} \\
|x| &= \sqrt{y} \\
x &= \sqrt{y} \quad \text{perché } x \geq 0
\end{aligned}
$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$$

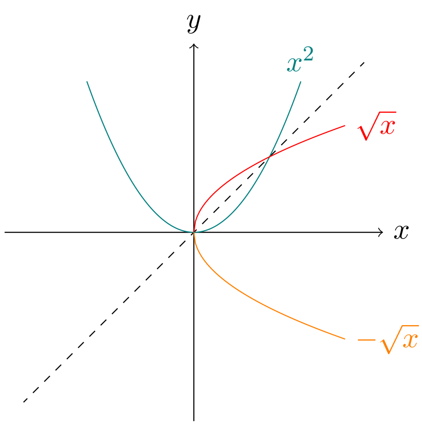
Si ottiene una funzione invertibile anche restringendo il dominio a $(-\infty, 0]$:

$$
\begin{aligned}
f : (-\infty, 0] &\to [0, +\infty) \\
x &\to x^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= x^2 \\
|x| &= \sqrt{y} \\
-x &= \sqrt{y} \quad \text{perché } x \leq 0 \\
x &= -\sqrt{y}
\end{aligned}
$$

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{x} \quad f^{-1} : [0, +\infty) \to (-\infty, 0]$$

Non è però possibile considerare insieme le due inverse: ciò che si otterrebbe *non è una funzione.*



2 Funzioni trigonometriche inverse

2.1 Seno

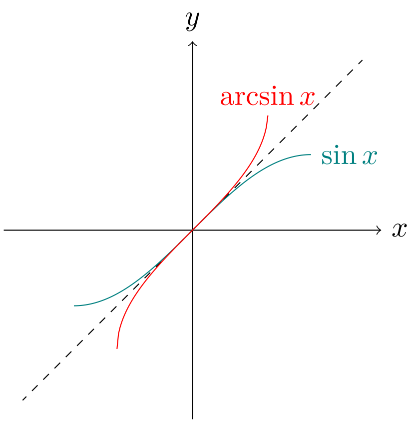
$$f(x) = \sin x \quad f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$

Se si restringe il dominio (per rendere iniettiva la funzione)

$$\begin{aligned} f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\to [-1, 1] \\ x &\to \sin x \end{aligned}$$

si ha allora che

$$\begin{aligned} \exists f^{-1} : [-1, 1] &\to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x &\to \arcsin x \end{aligned}$$

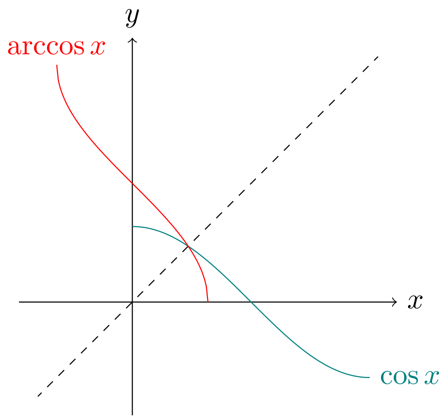


2.2 Coseno

$$f(x) = \cos x \quad f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$

Restringendo il dominio a $[0, \pi]$, si ricava la funzione inversa

$$
\begin{aligned}
f^{-1} : [-1,1] &\to [0,\pi] \\
x &\to \arccos x
\end{aligned}
$$

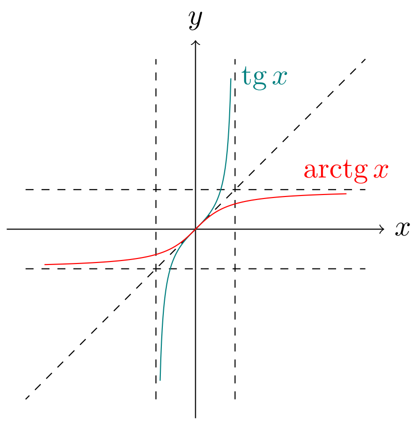


2.3 Tangente

$$f(x) = \operatorname{tg} x \quad f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \to [-1,1]$$

La funzione inversa si definisce restringendo il dominio a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$:

$$
\begin{aligned}
f^{-1} : \mathbb{R} &\to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\
x &\to \operatorname{arctg} x
\end{aligned}
$$



3 Funzioni crescenti, decrescenti e monotone

Sia $f : X \to \mathbb{R}$.

- f è **crescente** (**decrescente**) se $\forall x_1, x_2 \in X$ con $x_1 < x_2$ si ha che $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$).
- f è **strettamente crescente** (**strettamente decrescente**) se $\forall x_1, x_2 \in X$ con $x_1 < x_2$ si ha che $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Una funzione crescente o decrescente si dice **monotona**. Una funzione strettamente crescente o strettamente decrescente si dice **strettamente monotona**.

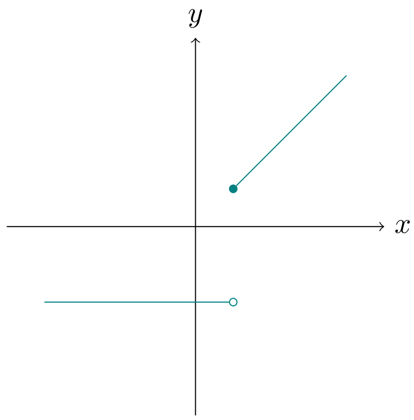
3.1 Esempi

$$f(x) = x^3$$

è strettamente crescente.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 1 \\ -2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

è crescente, ma non strettamente.

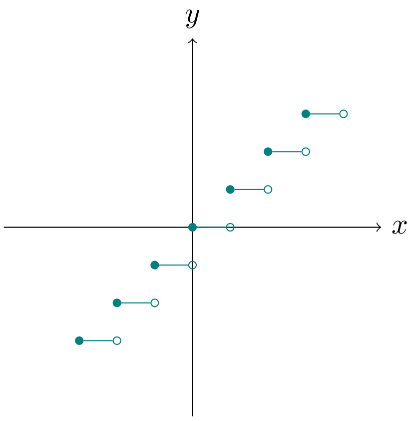


$$f(x) = x^2$$

è strettamente decrescente per $x \in (-\infty, 0)$ ed è strettamente crescente per $x \in [0, +\infty)$; non importa in quale dei due intervalli si include lo 0.

$$f(x) = [x]$$

è la funzione *parte intera*, il cui valore per ogni x è il più grande numero intero $\leq x$. Essa è crescente, ma non strettamente, e il suo grafico si dice “a scala”.



3.2 Monotonia e invertibilità

Teorema: Se una funzione $f : X \to f(X)$ è strettamente monotona, allora è invertibile.

Per esempio, se f è strettamente crescente, si ha che

$$\forall x_1, x_2 \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

e quindi

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

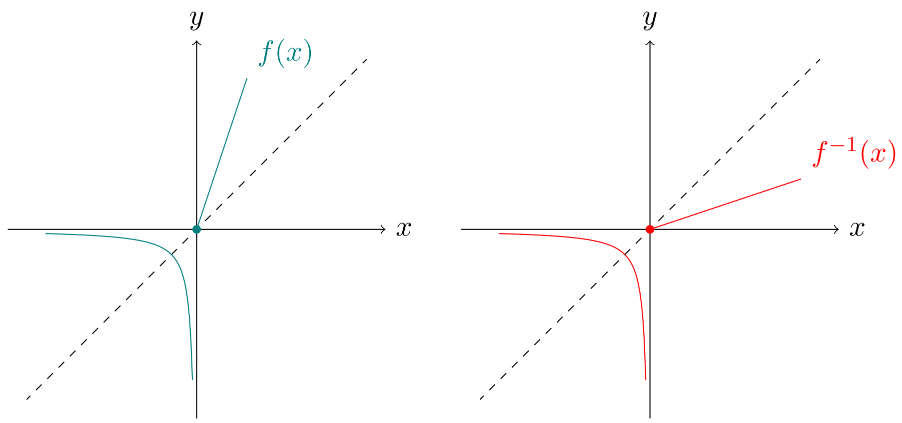
cioè f è iniettiva, e di conseguenza invertibile.

Il viceversa non è vero, cioè esistono funzioni invertibili che non sono strettamente monotone, come ad esempio

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

che non è monotona, ma ha funzione inversa

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{3} & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



3.3 Composizione

Se f e g sono funzioni monotone, anche la loro composizione $f \circ g$ è monotona. In particolare:

f	g	$f \circ g$
crescente	crescente	crescente
crescente	decrescente	decrescente
decrescente	crescente	decrescente
decrescente	decrescente	crescente

Inoltre, se f e g sono entrambe strettamente monotone, anche $f \circ g$ è strettamente monotona.

3.3.1 Esempio di dimostrazione: f e g decrescenti

Siccome g è decrescente, si ha che

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \implies \underbrace{g(x_1)}_{y_1} \geq \underbrace{g(x_2)}_{y_2}$$

Per la definizione di composizione,

$$(f \circ g)(x_1) = f(g(x_1)) = f(y_1)$$
$$(f \circ g)(x_2) = f(g(x_2)) = f(y_2)$$

e, poiché anche f è decrescente, vale

$$y_1 \geq y_2 \implies f(y_1) \leq f(y_2)$$
$$x_1 < x_2 \implies f(g(x_1)) \leq f(g(x_2))$$

quindi $f \circ g$ è crescente. $\square$