Azzolini Riccardo 2019-02-27

Esponenziali e logaritmi

1 Funzione esponenziale

Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. La funzione $f(x) = a^x$, con $x \in \mathbb{R}$, è chiamata **funzione esponenziale** con base a.

Indipendentemente dalla base, valgono le proprietà:

- $a^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = a^0 = 1$, quindi il grafico passa sempre dal punto $(0, 1)$
- $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
- $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Se $a > 1$,

$$x_1 < x_2 \implies a^{x_1} < a^{x_2} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

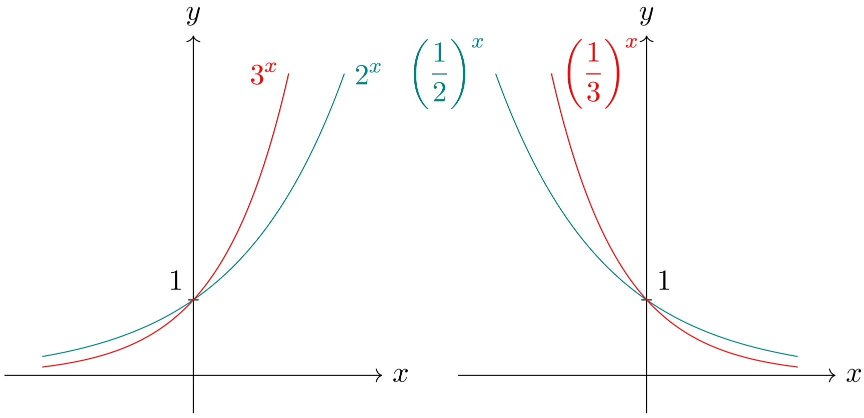
quindi $f(x) = a^x$ è strettamente crescente.

Se invece $0 < a < 1$,

$$x_1 < x_2 \implies a^{x_1} > a^{x_2} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

cioè $f(x) = a^x$ è strettamente decrescente.

1.1 Esempi



2 Funzione logaritmo

La funzione esponenziale

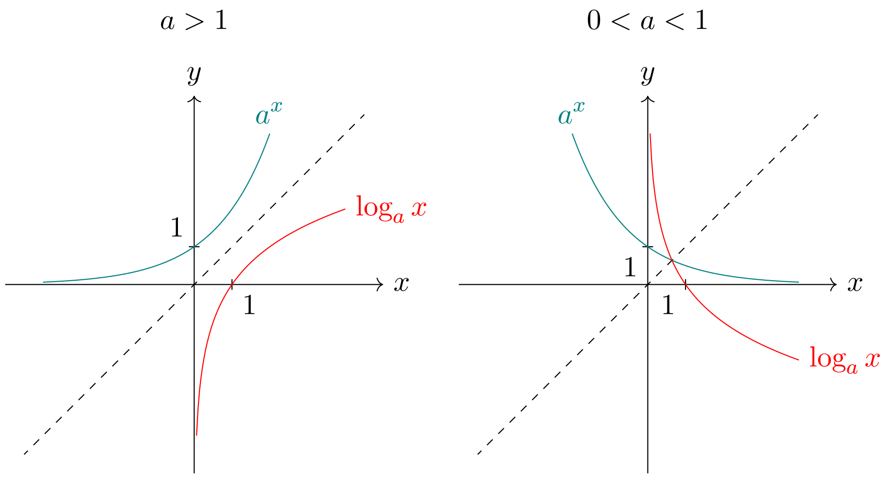
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to (0, +\infty) \\ x &\to a^x \end{aligned}$$

(con $a \neq 1$) è iniettiva, e quindi invertibile. La sua inversa

$$\begin{aligned} f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R} \\ x \to \log_a x \end{aligned}$$

è la funzione **logaritmo** in base a. Siccome, in generale, $f(f^{-1}(x)) = x = f^{-1}(f(x))$, si ha che

$$a^{\log_a x} = x = \log_a a^x$$



Osservazioni:

- Indipendentemente dalla base, $\log_a 1 = 0$.
- La funzione logaritmo ha la stessa monotonia dell'esponenziale di cui è l'inversa (come per tutte le funzioni inverse).

2.1 Proprietà

Sia $a > 0$, $a \neq 1$.

1. $\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$
2. $\log_a x^r = r \log_a x \quad \forall x \in (0, +\infty),\ r \in \mathbb{R}$
3. $\log_a \dfrac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$
4. Cambiamento di base: se $b > 0$, $b \neq 1$, $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$

2.1.1 Dimostrazione della 1

Siano $\alpha = \log_a x_1$ e $\beta = \log_a x_2$. Allora, $x_1 = a^\alpha$ e $x_2 = a^\beta$. Quindi, per le proprietà dell'esponenziale,

$$x_1 \cdot x_2 = a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$$

e di conseguenza, per la definizione di logaritmo,

$$\alpha + \beta = \log_a(x_1 x_2)$$
$$\log_a x_1 + \log_a x_2 = \log_a(x_1 x_2) \quad \square$$

2.1.2 Dimostrazione della 2

Sia $\alpha = \log_a x$, e quindi $x = a^\alpha$.

$$\begin{aligned}
x^r &= (a^\alpha)^r \\
x^r &= a^{r\alpha} \\
\log_a x^r &= r\alpha \\
\log_a x^r &= r \log_a x \quad \square
\end{aligned}$$

2.1.3 Dimostrazione della 3

$$\begin{aligned}
\log_a \frac{x_1}{x_2} &= \log_a(x_1 \cdot x_2^{-1}) \\
&\underset{(1)}{=} \log_a x_1 + \log_a x_2^{-1} \\
&\underset{(2)}{=} \log_a x_1 - \log_a x_2 \quad \square
\end{aligned}$$

2.1.4 Dimostrazione della 4

Sia $\alpha = \log_b x$, quindi $b^\alpha = x$.

$$\begin{aligned}
\log_a b^\alpha &= \log_a x \\
\alpha \log_a b &= \log_a x \\
\log_b x \cdot \log_a b &= \log_a x \\
\log_b x &= \frac{\log_a x}{\log_a b} \quad \square
\end{aligned}$$

3 Base e

Il **numero di Nepero**, $e \approx 2.71$, ha particolare importanza come base di esponenziali e logaritmi.

Per questo, la funzione logaritmo in base e è chiamata **logaritmo naturale**, e la si indica con $\ln x$ o semplicemente $\log x$ (senza specificare la base).