Azzolini Riccardo 2020-04-21

Calcolo a tableaux – Correttezza

1 Coppie complementari

Definizione: Una coppia di formule $A, \neg A$ si dice **complementare**.

Una coppia complementare di formule non è soddisfacibile: per ogni valutazione v, $v \models A$ se e solo se $v \not\models \neg A$, e viceversa. In particolare, nel caso degli insiemi di letterali, vale il seguente risultato:

Proposizione: Un insieme di letterali è soddisfacibile se e solo se *non contiene* coppie complementari.

Dimostrazione: Sia Γ un insieme di letterali che non contiene coppie complementari, e sia v la seguente valutazione:

$$\widetilde{\forall} p \in VAR \quad v(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in \Gamma \\ 0 & \text{se } p \notin \Gamma \end{cases}$$

Allora, $v \models \Gamma$, perché, considerando una formula (un letterale) $H \in \Gamma$:

- se $H = p \in VAR$, per costruzione di v si ha $v \models p$;
- se invece $H = \neg p,\ p \in VAR$, per ipotesi deve essere $p \notin \Gamma$ (altrimenti Γ conterrebbe la coppia complementare $p, \neg p$), quindi $v \not\models p$, che implica $v \models \neg p$.

Questa proposizione è interessante perché stabilisce una relazione tra una proprietà sintattica, l'esistenza in Γ di coppie complementari, e una proprietà semantica, la soddisfacibilità di Γ.

2 Rami di un tableau

Definizione: Sia $\mathcal{T}$ un tableau (non necessariamente completo) per un insieme di formule Γ. Un **ramo** di $\mathcal{T}$ è una sequenza $\rho = N_1, \dots, N_k$ di nodi di $\mathcal{T}$ tali che:

- N_1 è la radice di $\mathcal{T}$;
- $\widetilde{\forall} i = 1, \dots, k-1$, N_{i+1} è un successore diretto (figlio) di N_i;
- N_k è una foglia dell'albero.

In altre parole, un ramo è una sequenza di nodi che vanno dalla radice a una foglia, e che comprende, nell'ordine, tutti i nodi su tale percorso.

3 Rami/tableaux chiusi e aperti

Definizioni:

- Un *ramo* di un tableau è **chiuso** se un nodo appartenente al ramo contiene una coppia complementare.
- Un *tableau* è **chiuso** se tutti i suoi rami sono chiusi.
- Un *ramo* di un tableau è **aperto** se non è chiuso.
- Un *tableau* è **aperto** se non è chiuso, ovvero se ha almeno un ramo aperto.

3.1 Esempi

- Come primo esempio, si considera il seguente tableau (rappresentato come albero), nel quale, per chiarezza, sono mostrati anche i "nomi" dei nodi:

  - $N_1\colon (\neg B \to A) \lor \neg(C \land B \to \neg A)$
    - $N_2\colon (\neg B \to A)$
      - $N_3\colon \neg\neg B$
        - $N_4\colon B$
      - $N_5\colon A$
    - $N_6\colon \neg(C \land B \to \neg A)$
      - $N_7\colon C \land B, \neg\neg A$
        - $N_8\colon C \land B, A$
          - $N_9\colon C, B, A$

Ramo ρ	Stato
$\{N_1, N_2, N_3, N_4\}$	aperto
$\{N_1, N_2, N_5\}$	aperto
$\{N_1, N_6, N_7, N_8, N_9\}$	aperto

  Poiché ci sono rami aperti (in questo caso, tutti i rami sono aperti), il tableau è aperto.

- Un altro esempio è:

$$N_1\colon \neg(((A \to B) \land (A \to \neg B)) \to \neg A)$$

$$N_2\colon (A \to B) \land (A \to \neg B), \neg\neg A$$

$$N_3\colon (A \to B) \land (A \to \neg B), A$$

$$N_4\colon A \to B, A \to \neg B, A$$

$$N_5\colon \neg A, A \to \neg B, A \qquad N_8\colon B, A \to \neg B, A$$

$$N_6\colon \neg A, \neg A, A \qquad N_7\colon \neg A, \neg B, A \qquad N_9\colon B, \neg A, A \qquad N_{10}\colon B, \neg B, A$$

Ramo ρ	Stato
$\{N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6\}$	chiuso
$\{N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_7\}$	chiuso
$\{N_1, N_2, N_3, N_4, N_8, N_9\}$	chiuso
$\{N_1, N_2, N_3, N_4, N_8, N_{10}\}$	chiuso

Siccome tutte le foglie contengono una coppia complementare, ogni ramo è chiuso, e allora il tableau è complessivamente chiuso.

4 Rapporto fra tableaux e semantica

Teorema (di validità e completezza di $\mathrm{T}_{\mathrm{CPL}}$): Un insieme finito di formule Γ è insoddisfacibile se e solo se esiste un *tableau completo chiuso* per Γ.

Questo è un risultato centrale nell'ambito della logica. In generale, i teoremi di validità e completezza dei calcoli sono i risultati principali per ogni logica, in quanto riducono il problema di verificare una proprietà semantica essenziale a quello di verificare una proprietà sintattica.

Nel caso della logica proposizionale, è comunque possibile ragionare direttamente sulla semantica, dato che la si può descrivere mediante tavole di verità finite. Questa è, però, una caratteristica specifica proprio della logica proposizionale classica: già passando alla logica predicativa (del primo ordine) si perde la possibilità di avere una rappresentazione finita della semantica di una formula. Allora, il teorema di validità e completezza diventa più significativo, in quanto riduce lo studio della semantica, la quale fa appunto riferimento a valutazioni effettivamente infinite, allo studio di oggetti finiti.

4.1 Schema della dimostrazione

Tipicamente, per dimostrarlo, questo teorema viene affrontato separando gli aspetti di validità e di completezza, cioè i due versi del “se e solo se”:

- *Teorema* (di validità o correttezza di $\mathrm{T_{CPL}}$): Se esiste un tableau completo chiuso per Γ, allora Γ è insoddisfacibile.

  Questo teorema è detto di validità o di correttezza in quanto dimostra che l'esistenza di un certo oggetto sintattico (in questo caso, un tableau completo chiuso per Γ) è effettivamente una “certificazione” della proprietà semantica considerata (che qui è l'insoddisfacibilità).

- *Teorema* (di completezza di $\mathrm{T_{CPL}}$): Se un insieme finito di formule Γ è insoddisfacibile, allora esiste un tableau completo chiuso per Γ.

In generale, per qualunque logica, il teorema di validità è la parte “facile” da dimostrare (è sufficiente ragionare sulla forma delle regole del calcolo), mentre il teorema di completezza è un risultato “difficile”, che richiede dei ragionamenti più articolati. Spesso, per questo motivo, l'intero teorema di validità e completezza (con il “se e solo se”) è chiamato semplicemente teorema di completezza.

5 Teorema di validità – Lemma principale

Nel caso dei calcoli a tableaux, il lemma principale per dimostrare il teorema di validità è quello che garantisce che *le regole di* $\mathrm{T_{CPL}}$ *preservano la soddisfacibilità*:

Lemma: Per ogni (istanza di) regola $\mathcal{R}$ di $\mathrm{T_{CPL}}$, se la premessa di $\mathcal{R}$ è soddisfacibile, allora almeno una delle conclusioni è soddisfacibile.

Dimostrazione: Come esempio, si considera il caso della regola

$$\frac{\Gamma, \neg(A \land B)}{\Gamma, \neg A \mid \Gamma, \neg B}\,\neg\land$$

Si assume che la premessa sia soddisfacibile, cioè che esista una valutazione v tale che $v \models \Gamma, \neg(A \land B)$. Allora:

$$\begin{array}{rcll}
v \models \Gamma & \text{e} & v \models \neg(A \land B) & \\
v \models \Gamma & \text{e} & v \not\models (A \land B) & \\
v \models \Gamma & \text{e} & (v \not\models A \text{ o } v \not\models B) & \\
v \models \Gamma & \text{e} & (v \models \neg A \text{ o } v \models \neg B) & \\
(v \models \Gamma \text{ e } v \models \neg A) & \text{o} & (v \models \Gamma \text{ e } v \models \neg B) & \quad (\textit{legge distributiva di } \text{e } \textit{su } \text{o}) \\
(v \models \Gamma, \neg A) & \text{o} & (v \models \Gamma, \neg B) &
\end{array}$$

Quindi, è dimostrato che v verifica almeno una delle due conclusioni $\Gamma, \neg A$ e $\Gamma, \neg B$.

La dimostrazione per le altre regole è analoga.

6 Dimostrazione del teorema di validità

Utilizzando il lemma appena dimostrato, si può provare il teorema di validità (correttezza) di $\mathrm{T}_{\mathrm{CPL}}$. Innanzitutto, si ricorda l'enunciato di tale teorema:

Teorema: Se esiste un tableau completo chiuso per Γ, allora Γ è insoddisfacibile.

Dimostrazione: Sia $\mathcal{T}$ un tableau completo chiuso per Γ. Si dimostra che, per ogni nodo N di $\mathcal{T}$, l'insieme di formule Γ_N associato a tale nodo è insoddisfacibile. Evidentemente, questo significa che anche l'insieme associato alla radice dell'albero, cioè Γ, è insoddisfacibile.

La dimostrazione procede per induzione sull'altezza $h(N)$ di un nodo N nell'albero $\mathcal{T}$, così definita:[1]

$$h(N) = \begin{cases} 0 & \text{se } N \text{ è una foglia di } \mathcal{T} \\ h(N') + 1 & \text{se } N \text{ ha un solo figlio } N' \\ \max\{h(N'), h(N'')\} + 1 & \text{se } N \text{ ha due figli } N', N'' \end{cases}$$

- *Base*: $h(N) = 0$ significa che N è una foglia. Essendo $\mathcal{T}$ completo e chiuso, l'insieme Γ_N contiene una coppia complementare di letterali, quindi è insoddisfacibile.
- *Ipotesi induttiva*: Per ogni nodo M di $\mathcal{T}$ con $h(M) = k \geq 0$, Γ_M è insoddisfacibile.
- *Passo induttivo*: Sia N un nodo di $\mathcal{T}$ con $h(N) = k + 1$. Poiché la sua altezza è maggiore di 0 (dato che $k \geq 0$), sicuramente N non è una foglia, ovvero ha uno o due figli, a seconda che la regola $\mathcal{R}$ applicata a Γ_N nella costruzione del tableau sia una α-regola o una β-regola.

  In ogni caso, per definizione, l'altezza dei figli di N è minore di $h(N)$ (cioè $\leq k$), quindi si può applicare l'ipotesi induttiva, con la quale si deduce che Γ_M è insoddisfacibile per ogni figlio M di N.

  Ma gli insiemi di formule associati ai figli di N sono le conclusioni dell'applicazione di $\mathcal{R}$. Allora, per il lemma dimostrato in precedenza, anche la premessa della regola, ovvero Γ_N, è insoddisfacibile (se non lo fosse, allora dovrebbe essere soddisfacibile almeno una delle conclusioni, al contrario di quanto afferma l'ipotesi induttiva).

[1] Questa è la definizione convenzionale dell'altezza di un nodo in un albero.