Azzolini Riccardo 2020-05-14

Logica classica del primo ordine – Introduzione

1 Necessità di un linguaggio più ricco

Si consideri questa frase:

$$\text{Per ogni numero } n\text{, se } \underbrace{n \text{ è pari}}_{A} \text{ allora } \underbrace{n+1 \text{ è dispari}}_{B}.$$

Nella logica proposizionale, essa può essere resa con un'implicazione:

$$A \to B$$

È però importante notare che, mentre $A \to B$ è una formula che non è sempre vera, la frase è sempre vera (nel contesto dei numeri interi). Infatti, in $A \to B$ si perde il "collegamento" tra l'antecedente, che *nomina* n, e il conseguente, che *nomina* $n + 1$.

Per riuscire a rappresentare pienamente la struttura della frase, bisogna introdurre un linguaggio più ricco, che riesca a *predicare* ("essere un numero pari", "essere un numero dispari") sulle proprietà degli oggetti ("n" e "$n + 1$").

Altri elementi "nuovi" presenti in questa frase, rispetto a quelle trattate finora, sono i seguenti:

- La frase utilizza il quantificatore universale "per ogni": esso è un elemento che ha un ruolo simile ai connettivi, nel senso che caratterizza la *struttura logica* della frase, e non è legato alla specifica frase.
- "n è pari" e "$n+1$ è dispari" sono proprietà che dipendono dalla variabile n, quindi il loro valore di verità dipende da come si interpreta n.
- $n + 1$ indica l'applicazione di una funzione a n.

1.1 Formalizzazione

Il linguaggio più ricco necessario a rappresentare la frase

Per ogni numero n, se n è pari allora $n + 1$ è dispari.

è quello della **logica classica del primo ordine**, detta anche **logica dei predicati** (o **predicativa**).

Come si vedrà in seguito, questa frase può essere formalizzata come

$$\forall x(\, P(x) \to D(f(x))\,)$$

interpretando gli elementi che compaiono nella frase nell'*ambito* (che sarà formalizzato dalla nozione di *modello*) dei numeri naturali. In tale contesto, si interpretano:

- il **predicato** $P(y)$ come "y è pari";
- il predicato $D(y)$ come "y è dispari";
- $f(x)$ come una **funzione** che a x associa $x + 1$.

2 Altri esempi

- Un altro esempio di frase che introduce nuovi aspetti è il seguente:

  Se Zoe e Zelda sono sorelle allora Zelda è la zia della figlia di Zoe.

  - è presente il connettivo proposizionale di implicazione ("se… allora");
  - "Zoe" è "Zelda" sono dei nomi, che possono essere considerati alla stregua di **costanti**, scegliendo di indicarle convenzionalmente con c_1 e c_2;
  - "X e Y sono sorelle" e "X è la zia di Y" sono proprietà con due argomenti, cioè **relazioni**, che potrebbero essere indicate convenzionalmente con P e Q;
  - "figlia di Zoe" indica ancora una persona (quindi non è una proprietà), ottenuta applicando una *trasformazione* a Zoe, ovvero è una **funzione**, che si potrebbe indicare convenzionalmente con f.

  Assumendo queste convenzioni, la frase è descritta dalla *formula*:

  $$P(c_1, c_2) \to Q(c_2, f(c_1))$$

- Un altro esempio ancora è la frase

  Per ogni studente c'è (esiste) un esame difficile da superare.

  Essa *non contiene connettivi proposizionali.* Perciò, nella logica proposizionale, l'intera frase sarebbe rappresentata da una variabile proposizionale, con un notevole appiattimento espressivo Si avrebbe così un "appiattimento espressivo": diventerebbe indistinguibile da qualunque altra variabile proposizionale.

  Invece, nella logica predicativa, la frase potrebbe essere rappresentata in modo appropriato con la formula
  $$\forall x \exists y D(x, y)$$
  assumendo che $D(x, y)$ rappresenti il predicato "l'esame y è difficile da superare per lo studente x".