Azzolini Riccardo 2020-03-18

Semantica della logica proposizionale classica

1 Valutazione che verifica una formula

Definizione: Date una formula A e una valutazione $v : VAR \to \{0, 1\}$, si dice che v **verifica** (o **soddisfa**) A se $v(A) = 1$.

In simboli, si scrive $v \models A$ per indicare che v verifica A, e $v \not\models A$ per indicare che non vale $v \models A$.

2 Soddisfacibilità, validità e insoddisfacibilità

Definizione: Data una formula A, si dice che:

- A è **soddisfacibile** se *esiste* una valutazione v tale che $v \models A$;
- A è **valida** se, *per ogni* valutazione v, $v \models A$;
- A è **insoddisfacibile** se, *per ogni* valutazione v, $v \not\models A$.

Le formule valide sono anche dette **tautologie**, mentre quelle insoddisfacibili sono anche dette **contraddizioni** (o formule **contraddittorie**).

Osservazioni:

- Una formula valida è anche soddisfacibile, ma, viceversa, non tutte le formule soddisfacibili sono valide.
- Una formula insoddisfacibile, come suggerisce il termine, non può essere soddisfacibile, e quindi neanche valida.

3 Proprietà delle interpretazioni

Proposizione:[1] Siano A una formula, e $v : VAR \to \{0,1\}$ e $v' : VAR \to \{0,1\}$ due valutazioni (delle variabili proposizionali). Se, per ogni $p \in \text{Var}(A)$, $v(p) = v'(p)$, allora $v(A) = v'(A)$.

Sostanzialmente, questa proposizione afferma che, se due valutazioni si comportano allo stesso modo sulle variabili proposizionali che occorrono in una formula (ma non necessariamente anche su tutte le altre), allora attribuiscono alla formula lo stesso risultato. In altre parole, se una variabile *non* occorre in una formula, il suo valore è irrilevante per determinare il valore di verità di tale formula.

Dimostrazione: Per induzione sulla struttura di A:

- Casi base:
  - $A = \bot \implies v(\bot) = v'(\bot)$, perché il valore di $\bot$ è sempre 0, indipendentemente dalle variabili.
  - $A = p \in \text{Var}(A) \implies v(p) = v'(p)$ per ipotesi.
- Passo induttivo:
  - Se $A = \neg B$, la sottoformula B contiene le stesse variabili di A, cioè $\text{Var}(B) = \text{Var}(A)$, quindi $v(p) = v'(p)$ vale anche per le variabili $p \in \text{Var}(B)$. Vale allora l'ipotesi induttiva: $v(B) = v'(B)$. Applicando tale ipotesi alla definizione del valore di verità della negazione, si ricava che

    $$\begin{aligned} v(\neg B) = 1 &\text{ sse } v(B) = 0 \\ &\text{ sse } v'(B) = 0 && \text{(per ipotesi induttiva)} \\ &\text{ sse } v'(\neg B) = 1 \end{aligned}$$

    ovvero

    $$v(A) = v(\neg B) = v'(\neg B) = v'(A)$$

  - Se $A = B \to C$, si ha che $\text{Var}(A) = \text{Var}(B) \cup \text{Var}(C)$, quindi l'ipotesi $v(p) = v'(p)$ vale anche per le variabili che occorrono in B e per quelle che occorrono in C. Ciò permette di sfruttare l'ipotesi induttiva: $v(B) = v'(B)$ e $v(C) = v'(C)$. Infine, considerando la definizione del valore di verità dell'implicazione,

    $$\begin{aligned} v(B \to C) = 1 &\text{ sse } (v(B) = 0 \text{ o } v(C) = 1) \\ &\text{ sse } (v'(B) = 0 \text{ o } v'(C) = 1) && \text{(per ipotesi induttiva)} \\ &\text{ sse } v'(B \to C) = 1 \end{aligned}$$

[1] In matematica, solitamente, il termine "teorema" viene usato per indicare i risultati importanti, mentre per quelli di "secondo piano" si preferisce il termine "proposizione".

si ottiene che

$$v(A) = v(B \to C) = v'(B \to C) = v'(A)$$

– La dimostrazione relativa ai casi $A = B \land C$ e $A = B \lor C$ è analoga a quella effettuata per l'implicazione: l'unico elemento che cambia è la definizione del valore di verità della formula.

3.1 Conseguenze di questo risultato

Questo risultato permette di studiare la verità di una formula A limitandosi a considerare le possibili valutazioni distinte sull'insieme di variabili $\mathrm{Var}(A)$. Si osserva inoltre che, siccome i valori di verità sono solo 2 (0 e 1), il numero di tali valutazioni è finito, e in particolare è $2^{|\mathrm{Var}(A)|}$.

Sulla base di queste proprietà, si può allora definire un metodo che consente di analizzare in modo "meccanico" la verità delle formule: il *metodo delle tavole di verità*.

4 Metodo delle tavole di verità

Data, ad esempio, la formula

$$A = (p \lor \neg q) \to (q \land (q \to p))$$

si costruisce una tabella con:

- una riga per ogni interpretazione delle variabili $\mathrm{Var}(A)$ della formula, cioè $2^{|\mathrm{Var}(A)|}$ righe (in questo caso, $\mathrm{Var}(A) = \{p, q\}$, quindi le possibili interpretazioni sono $2^2 = 4$);
- una colonna per ogni sottoformula di A.

Per ogni riga, le celle delle colonne corrispondenti alle variabili proposizionali contengono un possibile assegnamento di valori di verità a tali variabili, mentre le celle delle colonne corrispondenti a formule più complesse contengono i valori di verità di queste ultime, calcolati in base ai valori delle sottoformule più semplici sulla stessa riga.

p	q	$\neg q$	$p \lor \neg q$	$q \to p$	$q \land (q \to p)$	$(p \lor \neg q) \to (q \land (q \to p))$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0	0

In questo modo, si vede che la formula è soddisfacibile: ci sono valutazioni (righe della tabella) per le quali la formula assume il valore di verità 1.

Come altro esempio, si considera la formula

$$A = (p \to q) \lor (q \to p)$$

nella quale occorrono le variabili $\mathrm{Var}(A) = \{p, q\}$:

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \lor (q \to p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

Questo formula è vera indipendentemente da quale interpretazione delle variabili venga considerata, cioè è un esempio di tautologia. Viceversa, la negazione di questa formula, cioè

$$A = (p \to q) \lor (q \to p) \qquad \mathrm{Var}(A) = \{p, q\}$$

è falsa indipendentemente dalla valutazione, perciò è un esempio di contraddizione:

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \lor (q \to p)$	$\neg((p \to q) \lor (q \to p))$
1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0

In generale, una formula è

- *soddisfacibile* se esiste una riga della tavola di verità per cui la formula ha valore 1;
- *valida* se la formula ha valore 1 per tutte le righe della tavola di verità;
- *insoddisfacibile* se la formula ha valore 0 per tutte le righe della tavola di verità, cioè se non esiste una riga per la quale essa abbia valore 1.

5 Considerazioni sulle tautologie

Le tautologie, come ad esempio

$$(p \to q) \vee (q \to p)$$

sono formule la cui verità dipende esclusivamente dalla loro struttura logica, e non dal significato delle proposizioni che vi compaiono. In questo senso, esse esprimono delle proprietà "logiche", cioè proprietà del sistema logico che sono indipendenti dal significato dato alle variabili proposizionali, e quindi da "quanto accade nel mondo che si sta descrivendo".

Alcune tautologie importanti (alle quali sono stati dati dei nomi specifici, per evidenziarne il ruolo logico) sono:

- Tertium non datur: $A \vee \neg A$
- Eliminazione della doppia negazione: $\neg\neg A \to A$
- Ex falso quodlibet: $(A \wedge \neg A) \to A$
- Consequentia mirabilis: $(\neg A \to A) \to A$
- Modus ponens: $((A \to B) \wedge A) \to B$
- Legge di Dummett: $(A \to B) \vee (B \to A)$
- Prefisso: $A \to (B \to A)$
- Contrapposizione: $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$