

# Matrici

## 1 Matrice

Una **matrice**  $n \times m$  (con  $n > 0$  e  $m > 0$ ) è una tabella con  $n$  righe e  $m$  colonne di numeri reali.

In genere una matrice  $n \times m$  si indica:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Nella matrice  $A$ , l'elemento  $a_{ij}$  si trova nella riga  $i$  e nella colonna  $j$ .

Come notazione abbreviata,  $A = (a_{ij})$  è una matrice  $A$  i cui elementi sono indicati con  $a_{ij}$ .

L'insieme delle matrici  $n \times m$  si indica con  $M_{n,m}$ .

### 1.1 Esempio

$$n = 2 \quad m = 3$$
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = 2 \quad a_{12} = 1 \quad a_{13} = 4$$
$$a_{21} = 0 \quad a_{22} = -1 \quad a_{23} = 7$$

## 2 Matrice quadrata

Una matrice  $n \times n$  (cioè con  $n = m$ ) si dice **quadrata** (di ordine  $n$ ).

L'insieme  $M_{n,n}$  di tutte le matrici quadrate  $n \times n$  si indica con  $M_n$ .

### 3 Vettori

- Se  $n = 1$ , una matrice  $A \in M_{1,m}$  si dice **vettore riga** (o *matrice riga*).
- Se  $m = 1$ , una matrice  $A \in M_{n,1}$  si dice **vettore colonna** (o *matrice colonna*).

Come caso particolare, se  $n = m = 1$ , le matrici  $A = (a_{11}) \in M_{1,1}$  corrispondono ai numeri reali.

#### 3.1 Esempi

Vettore riga:

$$A = (1 \quad -9 \quad 3) \in M_{1,3}$$

Vettore colonna:

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \in M_{4,1}$$

### 4 Matrice diagonale e identica

Una matrice quadrata  $A = (a_{ij}) \in M_n$  si dice **diagonale** se  $a_{ij} \neq 0$  solo per  $i = j$ .

Gli elementi sulla diagonale si indicano con  $a_{ii}$ .

Se  $A \in M_n$  è diagonale e  $a_{ii} = 1$  per ogni  $i = 1, \dots, n$  allora  $A$  si dice **matrice identica** (o **identità**)  $I_n$ .

#### 4.1 Esempio

$$n = 3$$
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = 5 \quad a_{22} = 3 \quad a_{33} = -4$$

$$a_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j$$

Matrici identiche:

$$n = 1 \quad I_1 = (1)$$

$$n = 2 \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$n = 3 \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 5 Somma tra matrici

Date due matrici  $A = (a_{ij})$  e  $B = (b_{ij})$  in  $M_{n,m}$ , la loro **somma**  $A+B$  è un'altra matrice  $C = (c_{ij}) \in M_{n,m}$  tale che  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$  per ogni  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, m$ .

### 5.1 Esempio

$$n = 2 \quad m = 3$$
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = a_{11} + b_{11} = 2 \quad c_{12} = a_{12} + b_{12} = 2 \quad \dots$$

## 6 Prodotto per uno scalare

Data una matrice  $A = (a_{ij}) \in M_{n,m}$  e uno **scalare** (cioè un numero reale)  $r \in \mathbb{R}$  il **prodotto per uno scalare**  $r \cdot A$  è una matrice tale che  $r \cdot A = (r \cdot a_{ij}) \in M_{n,m}$ .

## 6.1 Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2 \quad r = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{2} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

## 7 Prodotto righe per colonne

Date due matrici  $A \in M_{n,m}$  e  $B \in M_{m,p}$ , il loro **prodotto righe per colonne** è una matrice  $A \cdot B \in M_{n,p}$  tale che

$$A \cdot B = (c_{ij})$$
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} \cdot b_{kj}$$

### 7.1 Esempio su matrici quadrate

$$n = m = p = 2 \quad A, B \in M_2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = A \cdot B = (c_{ij})$$

$$c_{11} = \sum_{k=1}^2 a_{1k} \cdot b_{k1} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

$$c_{12} = \sum_{k=1}^2 a_{1k} \cdot b_{k2} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 1$$

$$c_{21} = \sum_{k=1}^2 a_{2k} \cdot b_{k1} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3$$

$$c_{22} = \sum_{k=1}^2 a_{2k} \cdot b_{k2} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 7$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

## 7.2 Esempio su matrici non quadrate

$$n = 2 \quad m = 3 \quad p = 4$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 9 \\ 5 & 5 & 3 & 14 \end{pmatrix}$$

## 7.3 Proprietà

Il prodotto tra matrici

- *non è commutativo*: anche se le due matrici sono quadrate, ed è quindi possibile calcolare sia  $A \cdot B$  che  $B \cdot A$ , non vale in generale la regola  $A \cdot B = B \cdot A$
- è associativo
- ha come elemento neutro la matrice identica  $I_n$

### 7.3.1 Controesempio della proprietà commutativa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

### 7.3.2 Esempio di elemento neutro

$$n = 3 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A \quad I_3 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$$A \cdot I_3 = A = I_3 \cdot A$$

## 8 Sottomatrice

Data una matrice  $A \in M_{n,m}$ , scegliendo alcune righe e colonne di  $A$  si ottiene una sua **sottomatrice**, costituita dagli elementi di  $A$  che si trovano negli incroci tra righe e colonne scelte.

### 8.1 Esempi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se si scelgono le righe 2 e 3 e le colonne 1 e 3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & 1 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

si ottiene la sottomatrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Controesempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ non è una sottomatrice di } A$$

## 9 Determinante

Il **determinante** è un numero reale che si associa a una matrice *quadrata*:

$$\det : M_n \rightarrow \mathbb{R}$$

Come notazione alternativa, il determinante di una matrice si può indicare anche scrivendo la matrice tra parentesi verticali:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix}$$

Il determinante si calcola nel modo seguente:

1. Se  $n = 1$ , cioè  $A = (a_{11})$ , allora  $\det A = a_{11}$ .
2. Se  $n = 2$ , cioè  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , allora  $\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$ .
3. Se  $n \geq 2$ , si sceglie una qualsiasi riga o colonna di  $A$ , poi
  - se si è scelta una riga  $i$ , si calcola

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} \cdot a_{ik} \cdot \det A_{ik}$$

- se si è scelta una colonna  $j$ , si calcola invece

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} \cdot a_{kj} \cdot \det A_{kj}$$

dove con  $A_{ij}$  si indica la sottomatrice  $(n-1) \times (n-1)$  ottenuta cancellando da  $A$  la riga  $i$  e la colonna  $j$

La regola utilizzata al punto 3 prende il nome di *regola di Laplace*. Nell'applicarla, conviene scegliere la riga o la colonna con il maggior numero di zeri, in modo da ridurre il numero di addendi della somma.

## 9.1 Esempio 1

$$n = 3 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Scelgo la prima riga.

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{k=1}^3 (-1)^{1+k} \cdot a_{1k} \cdot \det A_{1k} \\ &= (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \det A_{11} \\ &\quad + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \det A_{12} \\ &\quad + (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot \det A_{13} \end{aligned}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \det A_{11} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0 = 2$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \det A_{12} = 3 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 6$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det A_{13} = 3 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = 3$$

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 \cdot 6 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \\ &= 2 - 0 + 6 = 8 \end{aligned}$$

## 9.2 Esempio 2

$$n = 4 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Scelgo la seconda riga.



$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{k=1}^4 (-1)^{2+k} \cdot a_{2k} \cdot \det A_{2k} \\
&= 0 + 0 + (-1)^{2+3} \cdot a_{23} \cdot \det A_{23} + 0 \\
&= -\det A_{23}
\end{aligned}$$

$$A_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_{23} = A' = (a'_{ij})$$

Scelgo la terza colonna.

$$\begin{aligned}
\det A_{23} &= \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+3} \cdot a'_{k3} \cdot \det A'_{k3} \\
&= (-1)^{1+3} \cdot a'_{13} \cdot \det A'_{13} \\
&= \det A'_{13}
\end{aligned}$$

$$A'_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \det A'_{13} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$$

$$\det A_{23} = \det A'_{13} = -1$$

$$\det A = -\det A_{23} = 1$$

### 9.3 Regola di Sarrus

Se  $n = 3$ , esiste un metodo alternativo per il calcolo del determinante, la **regola di Sarrus**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

1. Si riscrive la matrice, ricopiando a destra della terza colonna le prime due.

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & \end{array}$$

2. Si calcola la somma dei prodotti degli elementi di ciascuna delle tre diagonali principali (dalla sinistra in alto alla destra in basso), meno la somma dei prodotti delle tre diagonali secondarie (dalla sinistra in basso alla destra in alto).

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \\ &\quad - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12} \end{aligned}$$

### 9.3.1 Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2 & \\ 5 & -1 & 0 & 5 & -1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot 0 \cdot (-1) - 5 \cdot 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \cdot 2 \\ &= 0 + 30 + 0 - 10 + 3 - 0 = 23 \end{aligned}$$