Azzolini Riccardo 2018-11-16

Teorema di Rouché-Capelli

1 Matrici associate a un sistema

A ogni sistema di m equazioni in n incognite sono associate varie matrici:

- la **matrice dei coefficienti** $A = (a_{ij})$, di dimensione $m \times n$, detta anche **matrice incompleta** del sistema
- il **vettore colonna dei termini noti** b, di dimensione $m \times 1$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- il **vettore colonna delle incognite** x, di dimensione $n \times 1$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Con queste matrici è possibile, sfruttando il prodotto righe per colonne, scrivere un sistema nella forma compatta $A \cdot x = b$.

Si definisce **matrice completa** di un sistema la matrice $(A \mid b)$, ottenuta aggiungendo alla matrice incompleta A la colonna b dei termini noti.

1.1 Esempio

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ - y + z = 10 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 100 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \mid b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -1 & 1 & 10 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sviluppo della notazione compatta $A \cdot x = b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x + \ y + z \\ - \ y + z \\ x - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2 Sistemi con infinite soluzioni

Dato un sistema di equazioni lineari in n incognite con infinite soluzioni, tali soluzioni *dipendono* da un certo numero k di incognite (con $1 \le k \le n$): in ogni n-upla, i valori di k delle sue componenti determinano anche i valori delle restanti $n - k$.

Per indicare che le soluzioni di un sistema sono infinite e dipendono da k incognite si usa la notazione ∞^k.

2.1 Esempio

Come esempio, si un sistema con una sola equazione ($m = 1$, caso limite di sistema) in due incognite ($n = 2$):

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \end{cases}$$

L'equazione si può riscrivere come:

$$y = 1 - 2x$$

Ci sono quindi infinite soluzioni che dipendono da x, cioè le soluzioni sono tutte le coppie della forma,

$$(x, 1 - 2x)$$

come ad esempio $(0, 1)$, $(1, -1)$, $(2, -3)$, ecc.

Il sistema ha quindi ∞^1 soluzioni, cioè infinite soluzioni che dipendono dal valore di una delle incognite.

3 Teorema di Rouché-Capelli

Dato un sistema lineare $A \cdot x = b$ in n incognite, esso è compatibile se e solo se $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A \mid b) = r$. Inoltre:

- se $r = n$ il sistema ha un'unica soluzione
- se $r < n$ il sistema ha ∞^{n-r} soluzioni

3.1 Esempio di sistema incompatibile

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det A = 0 \implies \operatorname{rg} A = 1$$

$$A \mid b = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcolo del rango di $A \mid b$ con il metodo degli orlati:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 2 \neq 0 \implies \operatorname{rg}(A \mid b) = 2$$

Siccome $\operatorname{rg} A \neq \operatorname{rg}(A \mid b)$, il sistema è incompatibile.

3.2 Esempio di sistema con una soluzione

$$\begin{cases} x + \ \ y + z = 100 \\ \quad - \ \ y + z = 10 \\ x - 2y \qquad = 0 \end{cases}$$

$$A \mid b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -1 & 1 & 10 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si può calcolare contemporaneamente il rango di A e di $A \mid b$ riducendo a gradini la matrice completa:

$$R_3 \to R_3 - R_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -1 & 1 & 10 \\ 0 & -3 & -1 & -100 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 - 3R_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -4 & -130 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A \mid b) = 3$$

Siccome il rango corrisponde al numero di incognite, il sistema ha un'unica soluzione. Per trovarla, si scrive il sistema corrispondente alla forma a gradini di $A \mid b$ e lo si risolve per sostituzione:

$$\begin{cases} x + y + \ \ z = 100 \\ \quad - y + \ \ z = 10 \\ \qquad\quad - 4z = -130 \end{cases}$$

1. Dalla terza equazione si ricava $z = \dfrac{130}{4} = \dfrac{65}{2}$
2. Dalla seconda equazione si ricava $y = z - 10 = \dfrac{65-20}{2} = \dfrac{45}{2}$
3. Dalla prima equazione si ricava $x = 100 - y - z = \dfrac{200-45-65}{2} = 45$

La soluzione è quindi:

$$x = 45 \quad y = \frac{45}{2} \quad z = 652 \qquad \left(45, \frac{45}{2}, \frac{65}{2}\right)$$

3.3 Esempio di sistema con infinite soluzioni

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ \qquad y + z = 2 \\ x + 4y + z = 5 \end{cases}$$

$$A \mid b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad R_3 \to R_3 - R_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 - 2R_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rg} A = 2 \quad \operatorname{rg}(A \mid b) = 2 \qquad n = 3$$

Il sistema è compatibile e ha $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni.

Il sistema corrispondente alla forma a gradini è:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ \qquad y + z = 2 \end{cases}$$

Per determinare la forma delle soluzioni, si considera una qualsiasi delle incognite come parametro (in questo caso è stata scelta la z) e la si porta a destra dell'uguale nelle equazioni del sistema:

$$\begin{aligned} y &= 2 - z \\ x &= 1 - 2y + z \\ &= 1 - 4 + 2z + z \\ &= 3z - 3 \end{aligned}$$

Le soluzioni del sistema sono quindi le terne della forma

$$(3z - 3, 2 - z, z)$$

al variare di z.