Azzolini Riccardo 2020-11-24

CFG — Alcune proprietà delle derivazioni

1 Proprietà D1

Proposizione: Sia $G = \langle V, T, \Gamma, S\rangle$ una CFG. Se $A \to \gamma \in \Gamma$, allora $A \Rightarrow_G \gamma$ e $A \overset{*}{\Rightarrow}_G \gamma$.

Dimostrazione: $A \Rightarrow_G \gamma$ corrisponde alla definizione di $\Rightarrow_G$,

$$\alpha A \beta \Rightarrow_G \alpha\gamma\beta \quad \text{se e solo se} \quad A \to \gamma \in \Gamma$$

se si pongono $\alpha = \beta = \epsilon$. Poi, per definizione, $A \overset{*}{\Rightarrow}_G \gamma$ se

$$A \overset{*}{\Rightarrow}_G \beta \quad \text{e} \quad \beta \Rightarrow_G \gamma$$

che ponendo $\beta = A$ diventa

$$A \overset{*}{\Rightarrow}_G A \quad \text{e} \quad A \Rightarrow_G \gamma$$

dove $A \overset{*}{\Rightarrow}_G A$ vale per definizione e $A \Rightarrow_G \gamma$ è appena stata dimostrata, quindi anche $A \overset{*}{\Rightarrow}_G \gamma$ è verificata.

2 Proprietà D2

Proposizione: Sia $G = \langle V, T, \Gamma, S\rangle$ una CFG. Se $\alpha \overset{*}{\Rightarrow}_G \beta\gamma_1\delta$ e $\gamma_1 \overset{*}{\Rightarrow}_G \gamma_n$, allora $\alpha \overset{*}{\Rightarrow}_G \beta\gamma_n\delta$.

Questa proprietà afferma che, se si può costruire una derivazione della stringa γ_n a partire dalla stringa γ_1, allora si può "simulare" tale costruzione anche quando γ_1 è contenuta in un contesto (costituito dalle stringhe β e δ).

Dimostrazione: Essendo $\gamma_1 \overset{*}{\Rightarrow} \gamma_n$, esiste per definizione una sequenza

$$\gamma_1 \Rightarrow \gamma_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \gamma_n$$

con $n \geq 1$. La dimostrazione procede per induzione su n.

- Se $n = 1$, allora $\gamma_1 = \gamma_n$ (la derivazione ha lunghezza 0), quindi $\alpha \overset{*}{\Rightarrow} \beta\gamma_1\delta$ implica $\alpha \overset{*}{\Rightarrow} \beta\gamma_n\delta$.

- Sia $n = h + 1$, con $h \geq 1$. La derivazione $\gamma_1 \stackrel{*}{\Rightarrow} \gamma_n$ ha lunghezza h, e l'ipotesi induttiva è che l'asserto della proposizione valga per derivazioni aventi lunghezza minore di h.

  Poiché la derivazione $\gamma_1 \stackrel{*}{\Rightarrow} \gamma_n$ ha almeno lunghezza 1, al primo passo $\gamma_1 \Rightarrow \gamma_2$ si ha $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Nel passare da γ_1 a γ_2 deve essere stata applicata una regola di produzione a un qualche simbolo non-terminale contenuto in γ_1, cioè deve essere $\gamma_1 = \gamma' A\gamma''$, $\gamma_2 = \gamma'\pi\gamma''$ e $\quad A \to \pi \in \Gamma$. Per la definizione del passo di derivazione, la stessa regola di produzione può essere applicata se la stringa γ_1 è inserita in un contesto:

  $$\beta \underbrace{\gamma' A\gamma''}_{\gamma_1} \delta \Rightarrow \beta \underbrace{\gamma'\pi\gamma''}_{\gamma_2} \delta$$

  cioè $\beta\gamma_1\delta \Rightarrow \beta\gamma_2\delta$. Da questo, e dal fatto che $\alpha \stackrel{*}{\Rightarrow} \beta\gamma_1\delta$, si deduce per definizione di $\stackrel{*}{\Rightarrow}$ che $\alpha \stackrel{*}{\Rightarrow} \beta\gamma_2\delta$. Infine, siccome $\gamma_2 \stackrel{*}{\Rightarrow} \gamma_n$ con una derivazione di lunghezza $h - 1 < h$, si conclude dall'ipotesi induttiva che $\alpha \stackrel{*}{\Rightarrow} \beta\gamma_n\delta$.

3 Proposizione D3

Proposizione: Sia $G = \langle V, T, \Gamma, S\rangle$ una CFG. Se $\alpha\gamma_1\alpha' \stackrel{*}{\Rightarrow}_G \alpha\gamma_n\alpha'$, con $\alpha, \alpha' \in T^*$, allora $\gamma_1 \stackrel{*}{\Rightarrow}_G \gamma_n$.

Questa proprietà significa che, quando si ha una derivazione di una stringa γ_n a partire da un'altra stringa γ_1 in un contesto fatto solo da terminali, γ_n è derivabile da γ_1 anche in assenza di tale contesto.

Dimostrazione: Essendo $\gamma_1 \stackrel{*}{\Rightarrow} \gamma_n$, esiste per definizione una sequenza

$$\alpha\gamma_1\alpha' \Rightarrow \alpha\gamma_2\alpha' \Rightarrow \cdots \Rightarrow \alpha\gamma_n\alpha'$$

con $n \geq 1$. La dimostrazione procede per induzione su n.

- Se $n = 1$, allora $\gamma_1 = \gamma_n$, quindi segue immediatamente dalla definizione di $\stackrel{*}{\Rightarrow}$ (come chiusura riflessiva e transitiva) che $\gamma_1 \stackrel{*}{\Rightarrow} \gamma_n$.

- Sia $n = h+1$, con $h \geq 1$. La derivazione $\alpha\gamma_1\alpha' \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha\gamma_n\alpha'$ ha lunghezza h, e l'ipotesi induttiva è che l'asserto della proposizione valga per derivazioni aventi lunghezza minore di h.

  Mentre per la proposizione D2 si è ragionato sul primo passo della derivazione, qui si ragiona sull'ultimo, $\alpha\gamma_h\alpha' \Rightarrow \alpha\gamma_{h+1}\alpha'$ (con $\gamma_h \neq \gamma_{h+1}$). Siccome α e α' non contengono simboli non-terminali, il simbolo non-terminale trattato nel passo di derivazione deve essere contenuto in γ_h, ovvero $\gamma_h = \gamma' A\gamma''$, $\gamma_{h+1} = \gamma'\pi\gamma''$ e $A \to \pi \in \Gamma$. Questa stessa regola di produzione può essere applicata in assenza del contesto formato da α e α': $\gamma' A\gamma'' \Rightarrow \gamma'\pi\gamma''$, cioè $\gamma_h \Rightarrow \gamma_{h+1}$.

Poiché $\alpha\gamma_1\alpha' \overset{*}{\Rightarrow} \alpha\gamma_h\alpha'$, con una derivazione di lunghezza $h-1 < h$, per ipotesi induttiva si ha che $\gamma_1 \overset{*}{\Rightarrow} \gamma_h$. Infine, da $\gamma_1 \overset{*}{\Rightarrow} \gamma_h$ e $\gamma_h \Rightarrow \gamma_{h+1}$ segue per definizione di $\overset{*}{\Rightarrow}$ che $\gamma_1 \overset{*}{\Rightarrow} \gamma_{h+1} = \gamma_n$, ciò che si voleva dimostrare.