Azzolini Riccardo 2019-03-27

Asintoti

1 Asintoto orizzontale e obliquo

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $+\infty$ (o $-\infty$, o entrambi) sia un punto di accumulazione per il dominio (in altre parole, tale che il dominio sia illimitato superiormente e/o inferiormente).

- Se

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

  allora la retta orizzontale $y = l$ si dice **asintoto orizzontale** di $f(x)$.

- Se invece

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} f(x) = \pm\infty$$

  ovvero non c'è un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), ma esiste una retta $y = mx + q$, con $m \neq 0$ (altrimenti sarebbe orizzontale), tale che

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} [f(x) - (mx + q)] = 0$$

  questa retta si chiama **asintoto obliquo** di $f(x)$.

1.1 Determinare l'asintoto obliquo

Dopo aver verificato che non ci sia un asintoto orizzontale, per determinare l'equazione dell'eventuale asintoto obliquo si calcolano due limiti:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ &\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} [f(x) - mx] = q \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \iff \text{asintoto obliquo } y = mx + q$$

2 Asintoto verticale

Siano $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione, almeno destro o sinistro, per X. Se almeno uno dei limiti

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

vale $+\infty$ o $-\infty$, allora la retta verticale $x = x_0$ è un **asintoto verticale** di $f(x)$.

Osservazione: $f(x)$ può anche essere definita in x_0, poiché il limite per $x \to x_0^{\pm}$ non è sempre uguale a $f(x_0)$.

3 Esempio

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

Per prima cosa, si determina il dominio:

$$\begin{gathered} x^2 - 1 \geq 0 \\ |x| \geq 1 \\ x \leq -1 \lor x \geq 1 \\ X = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \end{gathered}$$

Siccome la funzione è pari, perché il dominio è simmetrico rispetto all'origine e

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1} = f(x) \quad \forall x \in X$$

è sufficiente studiare gli asintoti di $f(x)$ in $[1, +\infty)$: nell'altra metà del dominio si avranno gli asintoti corrispondenti per simmetria rispetto all'asse y.

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 1} = +\infty$$

quindi non esiste un asintoto orizzontale, e di conseguenza è necessario verificare se esiste invece quello obliquo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-1}-1x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0$$

perciò l'asintoto obliquo è $y = x$ ($m = 1$ e $q = 0$).

Infine, non esistono asintoti verticali, dato che in tutti i punti di accumulazione appartenenti al dominio si hanno limiti finiti.