Azzolini Riccardo 2020-03-31

Variabili aleatorie discrete – Casi notevoli

1 Variabili aleatorie binomiali

Una variabile aleatoria **binomiale** conta il numero di successi in uno schema successo-insuccesso (con rimpiazzo,[1] che è il tipo di schemi successo-insuccesso visti finora).

1.1 Problema: bulloni difettosi

Problema: I bulloni prodotti da un'azienda sono difettosi con una probabilità del 20 %, e vengono messi in commercio in confezioni di 3 pezzi ciascuna. Qual è la probabilità che una confezione contenga al più 1 bullone difettoso?

Se si definisce una variabile aleatoria X, il cui valore è il numero di bulloni difettosi presenti nella confezione, l'evento considerato dal problema è $\{X \leq 1\}$, che, siccome X è discreta (assume i valori $0, 1, 2, 3$), può essere riscritto come unione di eventi elementari disgiunti:

$$\{X \leq 1\} = \{X = 0\} \cup \{X = 1\}$$
$$P\{X \leq 1\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\}$$

Supponendo che ciascun bullone sia o meno difettoso indipendentemente dagli altri, questa situazione è uno schema successo-insuccesso: si effettuano $n = 3$ "prove" (corrispondenti ai bulloni nella confezione), ciascuna delle quali ha una probabilità di "successo"[2] (cioè che il bullone sia difettoso) pari a $p = 20\ \% = 0.2$, e in questo modo si ottiene complessivamente un certo numero k di successi (da 0 a 3). Per risolvere il problema, bisogna ricavare la probabilità che k sia 0 oppure 1.

[1] Uno schema successo-insuccesso si dice "con rimpiazzo" se ciascuna prova ha la stessa probabilità di successo, indipendentemente dagli esiti delle prove precedenti. Nella situazione dell'estrazione di palline da un'urna, ciò corrisponde a reinserire (rimpiazzare, appunto) nell'urna la pallina estratta prima di procedere con l'estrazione successiva, in modo che il numero di palline associate al successo e di quelle associate all'insuccesso rimanga invariato.

[2] I termini "successo" e "insuccesso" non vanno interpretati con una qualche connotazione positiva o negativa: sono semplicemente i nomi che si danno, per convenzione, ai due possibili esiti di una prova. Infatti, è indifferente quale dei due esiti sia chiamato "successo" e quale invece "insuccesso": in questo caso, ad esempio, si potrebbe equivalentemente definire successo un bullone non difettoso, che ha una probabilità dell'80 %, e calcolare la probabilità che il numero di successi sia ≥ 2.

Per calcolare la probabilità di avere k successi, è necessario considerare tutte le possibili configurazioni di k bulloni difettosi (successi) e $n - k = 3 - k$ non difettosi (insuccessi), e sommare le probabilità di ciascuna di queste configurazioni.

1. Siano $B = \{B_1, B_2, B_3\}$ i tre bulloni in una confezione. Sceglierne una configurazione con k difettosi significa costruire un sottoinsieme di k elementi di B, quindi ci sono $\binom{n}{k} = \binom{3}{k}$ modi diversi di farlo. Infatti, si osserva che non importa l'ordine: ad esempio, dire che sono difettosi B_1, B_3 è esattamente uguale a dire che lo sono B_3, B_1.
2. Una volta individuata una configurazione di k bulloni difettosi e $n-k$ non difettosi, la probabilità di trovare tale configurazione in una confezione è il prodotto delle probabilità dei singoli bulloni:

$$\overbrace{p^k}^{\text{difettosi}} \underbrace{(1-p)^{n-k}}_{\text{non difettosi}}$$

Complessivamente, la probabilità di avere k successi su n prove con probabilità di successo p è allora:

$$P\{X = k\} = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & k = 0, 1, \ldots, n \\ 0 & \text{altrimenti } (k \text{ non è un numero valodi di successi}) \end{cases}$$

In generale, una variabile aleatoria con densità data da questa formula è detta **binomiale** di parametri n e p, e la sua distribuzione è indicata con $B(n, p)$.

Nel caso di questo problema, X è una variabile aleatoria binomiale di parametri $n = 3$ e $p = 0.2$: in simboli, $X \sim B(3, 0.2)$. Si può allora calcolare la probabilità richiesta:

$$\begin{aligned} P\{X \le 1\} &= P\{X = 0\} + P\{X = 1\} \\ &= \binom{3}{0} 0.2^0\, 0.8^3 + \binom{3}{1} 0.2^1\, 0.8^2 \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 0.512 + 3 \cdot 0.2 \cdot 0.64 \\ &= 0.512 + 0.384 \\ &= 0.896 \\ &= 89.6\ \% \end{aligned}$$

1.2 Variabili aleatorie di Bernoulli

Come caso particolare, per $n = 1$, la densità della distribuzione binomiale $B(n, p)$ si riduce a

$$
\begin{aligned}
P\{X = k\} = p(x) &= \begin{cases} \binom{1}{k} p^k (1-p)^{1-k} & k = 0, 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \binom{1}{0} p^0 (1-p)^1 & k = 0 \\ \binom{1}{1} p^1 (1-p)^0 & k = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1-p & k = 0 \\ p & k = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}
\end{aligned}
$$

cioè

$$p(1) = p \qquad p(0) = 1 - p$$

Tale densità corrisponde a una variabile aleatoria che rappresenta una singola prova di uno schema successo-insuccesso: essa assume solo i valori 1 (successo, con probabilità p) e 0 (insuccesso, con probabilità $1-p$). Allora, $B(1, p)$ prende il nome di distribuzione (o legge) **di Bernoulli** (ricordando che gli schemi successo-insuccesso sono anche chiamati schemi di Bernoulli).

Si osserva anche che contare il numero di successi in n prove corrisponde a sommare i valori di n variabili di Bernoulli indipendenti, quindi una variabile aleatoria binomiale $X \sim B(n, p)$ può essere interpretata come una somma

$$X = X_1 + \cdots + X_n$$

dove $X_i \sim B(1, p)$ per $i = 1, \ldots, n$.

1.3 Problema: prenotazioni per un volo

Problema: Sapendo che il 30 % dei passeggeri che hanno prenotato non si presentano alla partenza, una compagnia aerea accetta fino a 28 prenotazioni su un volo con una capienza di 24 posti. Qual è la probabilità che almeno un passeggero che ha regolarmente prenotato resti a terra?

Si definisce una variabile aleatoria discreta X che conta il numero di persone che si presentano, e si considera la probabilità

$$P\{X \geq 25\} = P\{X = 25\} + P\{X = 26\} + P\{X = 27\} + P\{X = 28\}$$

Supponendo che il comportamento (presentarsi o meno alla partenza) dei passeggeri sia indipendente (un'ipotesi non molto realistica: i passeggeri viaggiano spesso in gruppo), il problema corrisponde a uno schema successo-insuccesso, nel quale si sceglie considera successo il presentarsi di un passeggero (che avviene con probabilità $1 - 30\ \% = 0.7$), quindi $X \sim B(28, 0.7)$. La probabilità richiesta viene allora calcolata nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
P\{X \geq 25\} &= P\{X = 25\} + P\{X = 26\} + P\{X = 27\} + P\{X = 28\} \\
&= \binom{28}{25} 0.7^{25}\, 0.3^3 + \binom{28}{26} 0.7^{26}\, 0.3^2 \\
&\quad + \binom{28}{27} 0.7^{27}\, 0.3^1 + \binom{28}{28} 0.7^{28}\, 0.3^0 \\
&\approx 3276 \cdot 1.34 \cdot 10^{-4} \cdot 0.027 + 378 \cdot 9.39 \cdot 10^{-5} \cdot 0.09 \\
&\quad + 28 \cdot 6.57 \cdot 10^{-5} \cdot 0.3 + 1 \cdot 4.60 \cdot 10^{-5} \cdot 1 \\
&\approx 0.0119 + 0.00319 + 0.000552 + 0.0000460 \\
&\approx 0.0157 = 1.57\ \%
\end{aligned}$$

2 Variabili aleatorie ipergeometriche

Una variabile aleatoria **ipergeometrica** conta il numero di successi in uno schema successo-insuccesso *senza rimpiazzo*, nel quale le prove hanno un certo numero di possibili risultati considerati "successo", e altri considerati "insuccesso", e il risultato di una prova non si può ripresentare nelle successive (come se si estraessero palline da un urna senza rimpiazzarle), quindi le prove *non* sono indipendenti.

2.1 Problema: lettori di nastri

Problema: La memoria secondaria di un calcolatore è composta da 30 lettori di nastri, ciascuno dei quali contiene 100 file (quindi ci sono 3000 file in totale). Un programma accede a 28 file diversi. Qual è la probabilità che esso non debba usare il lettore numero 1?

Considerando come successo l'accesso a un file sul lettore 1, e definendo una variabile aleatoria X che conta tali successi, si è interessati all'evento $\{X = 0\}$.

Siccome lo stesso file non può essere letto più volte, il problema è uno schema successo-insuccesso senza rimpiazzo: gli $n_1 = 100$ file sul lettore 1 corrispondono al successo, e i restanti $n_2 = 2900$ corrispondono all'insuccesso; si effettuano $n = 28$ prove, e si vogliono $k = 0$ successi.

- Tutti i casi favorevoli, nei quali cui si ottengono $k = 0$ successi, possono essere enumerati scegliendo $k = 0$ file tra gli $n_1 = 100$ sul lettore 1, e $n - k = 28 - 0 = 28$ tra gli $n_2 = 2900$ sugli altri lettori, quindi il numero di tali casi è:

$$\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k} = \binom{100}{0}\binom{2900}{28}$$

- Ogni caso possibile corrisponde a una scelta di $n = 28$ file tra tutti gli $n_1 + n_2 = 3000$ disponibili, che può essere effettuata in

$$\binom{n_1+n_2}{n} = \binom{3000}{28}$$

  modi diversi.

Allora, la probabilità di avere k successi è, in generale,

$$P\{X = k\} = \begin{cases} \dfrac{\dbinom{n_1}{k}\dbinom{n_2}{n-k}}{\dbinom{n_1+n_2}{n}} & k = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

perciò X è detta variabile aleatoria **ipergeometrica** di parametri $n_1 = 100$, $n_2 = 2900$ e $n = 28$, e, nello specifico, la probabilità di non usare il lettore 1 è:

$$P\{X = 0\} = \frac{\overbrace{\binom{100}{0}}^{=1}\binom{2900}{28}}{\binom{3000}{28}} \approx 0.385 = 38.5\ \%$$

Nota: Per questa formula, è utile adottare la convenzione che $\binom{a}{b} = 0$ se $a < b$: così, tale formula rimane valida nei casi in cui $n_1 < k$ e/o $n_2 < n - k$, per i quali dà allora probabilità 0, corrispondente al fatto che non siano disponibili abbastanza elementi diversi per ottenere k successi e/o $n - k$ insuccessi.

2.1.1 Probabilità con rimpiazzo

Se fosse possibile accedere più volte allo stesso file, lo schema successo-insuccesso diventerebbe con rimpiazzo. Per ogni accesso a un file, la probabilità che esso sia sul lettore 1 sarebbe allora sempre $\frac{1}{30}$, quindi $X \sim B(28, \frac{1}{30})$, e perciò:

$$P\{X = 0\} = \underbrace{\binom{28}{0}}_{=1}\underbrace{\left(\frac{1}{30}\right)^0}_{=1}\left(\frac{29}{30}\right)^{28} \approx 0.387 = 38.7\ \%$$

Si osserva che la probabilità ottenuta con rimpiazzzo (38.7 %) è molto simile a quella senza rimpiazzo (38.5 %). Infatti, il numero di file (3000) è molto superiore al numero di letture (28), quindi escludere un file dalle letture successive dopo averlo letto una volta cambia solo di poco la probabilità di successo.

3 Variabili aleatorie geometriche

In uno schema successo-insuccesso con rimpiazzo, una variabile aleatoria **geometrica** conta il numero di insuccessi che si riscontrano prima di ottenere il primo successo.

Sia p la probabilità di successo di una singola prova (e quindi $1-p$ quella di insuccesso). La probabilità che i risultati delle prime k prove siano insuccessi è $(1-p)^k$, e la probabilità che poi la $(k+1)$-esima prova abbia successo è p. Allora, una variabile aleatoria geometrica X di parametro p ha la seguente densità:

$$P\{X = k\} = \begin{cases} (1-p)^k\, p & k = 0, 1, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Nota: La scelta di contare il numero di insuccessi precedenti al successo, e non il numero della prova che dà il primo successo (ad esempio, per il lancio di una moneta, "esce croce 3 volte prima che esca testa", e non "esce testa per la prima volta al 4° lancio") ha il vantaggio di ammettere che la variabile assuma il valore $k = 0$, permettendo così l'uso di k, invece che $k-1$, nella formula della densità (ciò semplifica i calcoli). Infatti, ha senso dire che ci sono 0 insuccessi prima del primo successo (significa che il successo è immediato), mentre le prove sono solitamente numerate a partire da 1, quindi non si può avere successo alla prova 0.

3.1 Mancanza di memoria

Problema: In uno schema successo-insuccesso, si suppone di non aver avuto alcun successo nelle prime k prove. Qual è la probabilità di dover attendere ancora m prove per avere il primo successo, cioè che tale successo avvenga alla $(k+m)$-esima prova?

Indicando con la variabile aleatoria T l'istante di primo successo, e sapendo che $T > k$ (altrimenti si avrebbe avuto successo in una delle prime k prove), la richiesta del problema è la probabilità condizionata $P\{T = k + m \mid T > k\}$.

In base alla definizione data prima, $X = T - 1$ (il numero di insuccessi prima del primo successo) è una variabile aleatoria geometrica di parametro p (dove p è la probabilità di successo nella singola prova). Allora, la probabilità richiesta può essere riformulata come:

$$\begin{aligned}
P\{T = k + m \mid T > k\} &= P\{T - 1 = k + m - 1 \mid T - 1 > k - 1\} \\
&= P\{X = k + m - 1 \mid X > k - 1\} \\
&= P\{X = k + m - 1 \mid X \geq k\}
\end{aligned}$$

Per calcolarla, sarà necessario applicare la definizione di probabilità condizionata:

$$\begin{aligned}
P\{X = k + m - 1 \mid X \geq k\} &= \frac{P\{X = k + m - 1, X \geq k\}}{P\{X \geq k\}} \\
&= \frac{P\{X = k + m - 1\}}{P\{X \geq k\}}
\end{aligned}$$

(perché $\{X = k + m - 1\} \cap \{X \geq k\} = \{X = k + m - 1\}$, per assorbimento).

Considerando che l'evento $\{X \geq k\}$ corrisponde a un'unione infinita numerabile di eventi elementari disgiunti,

$$\{X \geq k\} = \bigcup_{i=k}^{\infty} \{X = i\}$$

la sua probabilità può essere ricavata nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
P\{X \geq k\} &= \sum_{i=k}^{\infty} P\{X = i\} \\
&= \sum_{i=k}^{\infty} p\,(1 - p)^i \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} p\,(1 - p)^{k+i} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} p\,(1 - p)^k (1 - p)^i \\
&= (1 - p)^k \sum_{i=0}^{\infty} p\,(1 - p)^i
\end{aligned}$$

$p\,(1-p)^i$ è la densità di probabilità di X, quindi, per le proprietà delle densità discrete, la somma $\sum_{i=0}^{\infty} p\,(1-p)^i$, che considera tutti gli eventi elementari ($\{X = 0\}, \{X = 1\}, \ldots$), deve valere 1, e di conseguenza:

$$P\{X \geq k\} = (1 - p)^k$$

Infine, procedendo con il calcolo della soluzione,

$$\begin{aligned}
P\{X = k + m - 1 \mid X \geq k\} &= \frac{P\{X = k + m - 1\}}{P\{X \geq k\}} \\
&= \frac{p\,(1-p)^{k+m-1}}{(1-p)^k} \\
&= \frac{p\,(1-p)^k (1-p)^{m-1}}{(1-p)^k} \\
&= p\,(1-p)^{m-1}
\end{aligned}$$

si conclude che

$$P\{X = k + m - 1 \mid X \geq k\} = P\{X = m - 1\}$$

o, equivalentemente, che

$$P\{T = k + m \mid T > k\} = P\{T = m\}$$

cioè che la probabilità di dover aspettare ancora m prove per ottenere il primo successo è la stessa che si avrebbe se i k insuccessi iniziali non si fossero verificati. Infatti, siccome le prove sono indipendenti, gli insuccessi nelle prime k prove non alterano la probabilità di successo nelle prove successive.

Quest'uguaglianza, che in forma generale è

$$P\{X = k + m \mid X \geq k\} = P\{X = m\} \quad \forall k, m = 0, 1, \dots$$

vale per qualunque variabile aleatoria geometrica, ed è chiamata proprietà di **mancanza di memoria**.

4 Distribuzione binomiale negativa

La definizione del coefficiente binomiale,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \quad \forall n, k \in \mathbb{N}$$

può essere generalizzata a n reali:

$$\binom{\beta}{k} = \frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-k+1)}{k!} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$$

È così possibile definire la distribuzione **binomiale negativa** di parametri $\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0$ e $p \in [0, 1]$, caratterizzata dalla seguente densità di probabilità discreta:

$$p(x) = \begin{cases} \dbinom{\alpha + x - 1}{x} p^\alpha (1-p)^x & x = 0, 1, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Come significato intuitivo, nel caso in cui $\alpha \in \mathbb{N}$, una variabile aleatoria binomiale negativa conta il numero di insuccessi che si hanno prima di ottenere α successi, in uno schema successo-insuccesso con rimpiazzo nel quale la probabilità di successo è p. Infatti, per ottenere α successi e x insuccessi sono necessarie $\alpha + x$ prove: i risultati delle prime $\alpha + x - 1$ saranno una qualsiasi sequenza di $\alpha - 1$ successi e x insuccessi, mentre quello dell'$(\alpha + x)$-esima prova sarà sicuramente l'α-esimo successo. Allora,

- ci sono $\binom{\alpha+x-1}{x}$ modi diversi di scegliere quali x prove della sequenza saranno insuccessi,
- ciascuna di queste sequenze ha probabilità $p^\alpha(1-p)^x$,

quindi si ottiene appunto la formula della densità mostrata prima.

Come suggerito da questo significato intuitivo, la distribuzione binomiale negativa è una generalizzazione della distribuzione geometrica, che infatti si ritrova ponendo a 1 il numero di successi ($\alpha = 1$):

$$\binom{1+x-1}{x} p^1 (1-p)^x = \underbrace{\binom{x}{x}}_{=1} p\,(1-p)^x = p\,(1-p)^x$$

4.1 Dimostrazione che $p(x)$ è una densità

Per verificare che la funzione

$$p(x) = \begin{cases} \binom{\alpha+x-1}{x} p^\alpha (1-p)^x & x = 0, 1, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

sia effettivamente una densità di probabilità discreta, è necessario dimostrare che la sua somma su tutti gli eventi elementari è 1:

$$\sum_{x=0}^{\infty} p(x) = 1$$

La dimostrazione si basa sulla seguente serie:

$$\sum_{x=0}^{\infty} \binom{\alpha+x-1}{x} t^x = \frac{1}{(1-t)^\alpha}$$

Ponendo $t = 1 - p$, si ha:

$$\sum_{x=0}^{\infty} \binom{\alpha+x-1}{x} (1-p)^x = \frac{1}{(1-(1-p))^\alpha} = \frac{1}{p^\alpha}$$

Allora:

$$
\begin{aligned}
\sum_{x=0}^{\infty} p(x) &= \sum_{x=0}^{\infty} \binom{\alpha + x - 1}{x} \overbrace{p^{\alpha}}^{\text{costante}} (1-p)^x \\
&= p^{\alpha} \sum_{x=0}^{\infty} \binom{\alpha + x - 1}{x} (1-p)^x \\
&= p^{\alpha} \frac{1}{p^{\alpha}} = 1 \qquad \square
\end{aligned}
$$