Azzolini Riccardo 2018-10-16

Funzione inversa e composizione di funzioni

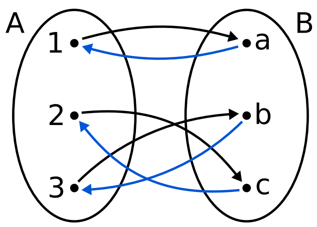
1 Funzione inversa

Se $f : A \to B$ è una funzione biettiva, la sua funzione **inversa** è la funzione $f^{-1} : B \to A$ tale che per ogni $b \in B$, $f^{-1}(b)$ è l'unico elemento di A che ha b come immagine, cioè $f(f^{-1}(b)) = b$.

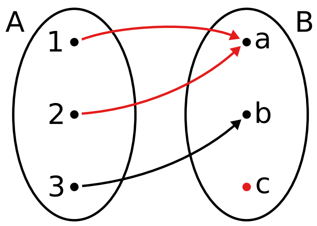
1.1 Esempi su insiemi finiti

$$A = \{1, 2, 3\} \qquad B = \{a, b, c\}$$

$$f : A \to B \qquad f(1) = a \quad f(2) = c \quad f(3) = b$$
$$f^{-1} : B \to A \qquad f^{-1}(a) = 1 \quad f^{-1}(b) = 3 \quad f^{-1}(c) = 2$$



$$g : A \to B \qquad g(1) = a \quad g(2) = a \quad g(3) = b$$



g non è biettiva:

- non è iniettiva perché $g(1) = g(2) = a$
- non è suriettiva perché c non è immagine di alcun elemento di A

Non è quindi possibile definire la funzione inversa di g perché la relazione inversa $\{(a,1),(a,2),(b,3)\}$ non è una funzione.

1.2 Esempio su insieme infinito

$$f : n \in \mathbb{Z} \mapsto n + 1 \in \mathbb{Z}$$

- f è iniettiva:

$$\forall n, m \in \mathbb{Z}, \quad n \neq m \implies f(n) \neq f(m)$$
$$f(n) = n + 1 \quad f(m) = m + 1$$
$$\forall n, m \in \mathbb{Z}, \quad n \neq m \implies n + 1 \neq m + 1$$

- f è suriettiva:

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad \exists n \in \mathbb{Z}, \quad m = f(n)$$
$$m = f(n) = n + 1$$
$$n = m - 1$$
$$m = (m - 1) + 1 = f(m - 1)$$
$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad m = f(m - 1)$$

- Quindi f è biettiva.

È possibile calcolare $f^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Per ogni $n \in \mathbb{Z}$, $f^{-1}(n)$ è quel numero tale che $f(f^{-1}(n)) = n$, cioè $f^{-1}(n) + 1 = n$. Quindi:

$$f^{-1}(n) = n - 1$$

2 Composizione

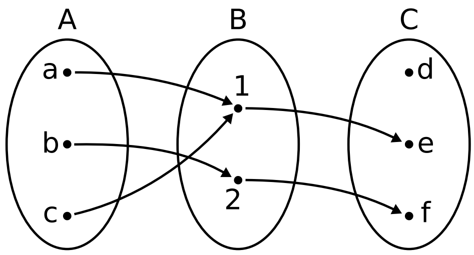
Date due funzioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$, se $a \in A$ allora $f(a) \in B$ e $g(f(a)) \in C$: si dice allora **composizione** di f e g la funzione

$$g \circ f : a \in A \mapsto g(f(a)) \in C$$

2.1 Esempio

$$A = \{a, b, c\} \qquad B = \{1, 2\} \qquad C = \{d, e, f\}$$

$$f(a) = 1 \quad f(b) = 2 \quad f(c) = 1$$
$$g(1) = e \quad g(2) = f$$



$$g \circ f : A \to C$$
$$(g \circ f)(a) = e \quad (g \circ f)(b) = f \quad (g \circ f)(c) = e$$

2.2 Composizione con l'inversa

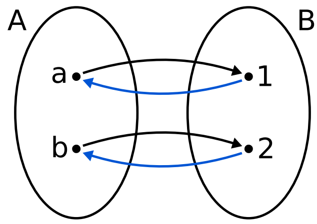
Data una funzione biettiva $f : A \to B$ e la sua inversa $f^{-1} : B \to A$:

- se $a \in A$, $f^{-1}(f(a)) = a$, quindi $f^{-1} \circ f = id_A$
- se $b \in B$, $f(f^1(b)) = b$, quindi $f \circ f^{-1} = id_B$

2.2.1 Esempio

$$A = \{a, b\} \qquad B = \{1, 2\}$$

$$f(a) = 1 \quad f(b) = 2$$
$$f^{-1}(1) = a \quad f^{-1}(2) = b$$



$$f^{-1} \circ f : A \to A$$
$$(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(1) = a$$
$$(f^{-1} \circ f)(b) = f^{-1}(f(b)) = f^{-1}(2) = b$$