Azzolini Riccardo 2019-10-04

Geometria in un reticolo discreto

1 Intorno

L'**intorno** di un pixel p di coordinate (x, y) può essere definito:

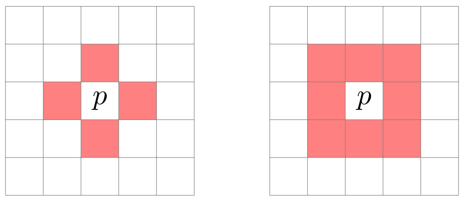
- secondo la **vicinanza a 4** (*four-neighbourhood*), N4(p), che include le coordinate:

$$(x+1, y), (x-1, y), (x, y+1), (x, y-1)$$

- secondo la **vicinanza a 8** (*eight-neighbourhood*), N8(p), la quale aggiunge a N4(p) i punti appartenenti a ND(p), che sono:

$$(x+1, y+1), (x+1, y-1), (x-1, y+1), (x-1, y-1)$$

N4(p) N8(p)



Ogni pixel dell'intorno (a 4/8) si considera a distanza unitaria dal pixel p. Se p giace sul bordo dell'immagine, alcuni pixel del suo intorno possono essere situati fuori dal piano immagine.

2 Adiacenza

Sia V un intervallo di livelli di grigio (ad esempio $\{32, 33, \dots, 64\}$). Si definiscono:

Adiacenza a 4: due pixel p e q sono **4-adiacenti** se hanno *valori in* V e $q \in \text{N4}(p)$.

Adiacenza a 8: due pixel p e q sono **8-adiacenti** se hanno *valori in* V e $q \in \text{N8}(p)$.

Adiacenza a m: due pixel p e q sono **m-adiacenti** se hanno *valori in* V e

- $q \in \text{N4}(p)$, oppure

- $q \in \mathrm{ND}(p)$, ma gli intorni $\mathrm{N4}(p)$ e $\mathrm{N4}(q)$ non hanno elementi in comune con valori in V (cioè non ci sono pixel che sono 4-adiacenti sia a p che a q).

Adiacenza a 4

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Adiacenza a 8

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Adiacenza a m

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

L'adiacenza a m permette di eliminare le ambiguità nei cammini.

3 Cammino

Un **cammino** da un pixel p, con coordinate (x, y), a un pixel q, con coordinate (s, t), è una sequenza di pixel distinti con coordinate $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, tale che:

- $(x_0, y_0) = (x, y)$, cioè il primo pixel della sequenza è p;
- $(x_n, y_n) = (s, t)$, cioè l'ultimo pixel della sequenza è q;
- (x_i, y_i) è adiacente a (x_{i-1}, y_{i-1}) per ogni $i,\ 1 \leq i \leq n$, cioè gli elementi contigui della sequenza sono adiacenti.

Si possono definire cammini a 4, 8 o m, a seconda dell'adiacenza scelta.

4 Connettività

Sia S un insieme di pixel di un'immagine. Due pixel p e q sono detti connessi in S se esiste un cammino tra p e q costituito da pixel interamente in S.

Se p e q sono 4-connessi, allora sono anche 8-connessi.

Osservazione: I pixel che costituiscono il cammino devono:

- appartenere alla parte dell'immagine definita dall'insieme di pixel S;
- avere un livello di grigio appartenente a V.

4.1 Componenti connesse

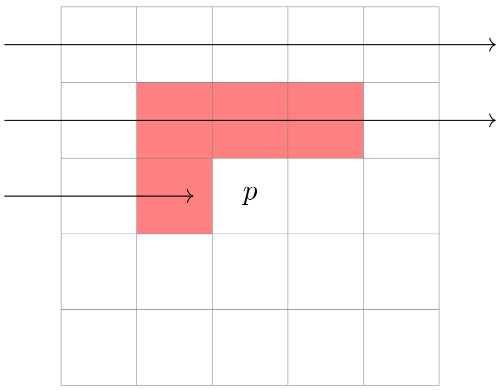
- Per ogni pixel p in S, l'insieme di pixel connessi a p è detto **componente connessa**.
- Se l'insieme S ha una sola componente connessa (cioè se ciascuno dei pixel in S è connesso a tutti gli altri pixel in S), è detto **insieme connesso**.
- Un sottoinsieme R di pixel di un'immagine è detto **regione** dell'immagine se è un insieme connesso.

5 Connected Component Labeling

L'*algoritmo per la marcatura delle componenti connesse* (**Connected Component Labeling**) individua le componenti connesse di un'immagine (solitamente binaria, cioè a due livelli di grigio), e assegna a ciascuna di esse un'etichetta diversa. Esso permette di individuare gli oggetti distinti presenti nell'immagine, che è un passo preliminare a successive analisi e classificazioni.

Per descrivere il funzionamento dell'algoritmo, si suppone che l'immagine di input sia binaria, che si utilizzi la connettività a 8, e che le componenti connesse da individuare siano costituite da valori pari a 1 (che, convenzionalmente, corrisponde al bianco), cioè che si abbia $V = \{1\}$.

1. Si esegue la scansione dell'immagine, scorrendo una riga alla volta, finché non si trova un pixel p con valore appartenente a $V = \{1\}$.
2. Quando questo è stato trovato, si esaminano i 4 vicini di p (secondo l'intorno a 8) che sono già stati incontrati nella scansione:

   In base a questi, si etichetta p:

   - se tutti i 4 vicini hanno valore 0, si assegna a p una nuova etichetta;
   - se solo uno dei vicini ha $V = \{1\}$, si assegna la sua etichetta a p;

- se più di uno dei vicini hanno $V = \{1\}$, si assegna una delle loro etichette a p, e si prende nota delle equivalenze tra tutte queste etichette.

3. Si ripete questo procedimento, finché non viene completata la scansione dell'immagine.
4. Le etichette vengono raggruppate in classi di equivalenza, e a ciascuna classe si assegna un'etichetta diversa.
5. Si esegue una seconda scansione, sostituendo ciascuna etichetta con quella assegnata alla sua classe di equivalenza.

5.1 Immagini a livelli di grigio

Per applicare quest'algoritmo a un'immagine a livelli di grigio, è prima necessaria un'operazione di *sogliatura*, che trasforma i livelli di grigio in valori binari:

- i pixel con valori minori di una data soglia diventano neri;
- i pixel con valori maggiori della soglia diventano bianchi.

Se, però, i valori di grigio corrispondenti agli oggetti da individuare sono presenti anche nello sfondo, in seguito alla sogliatura verranno individuate molte componenti connesse che non corrispondono effettivamente a parti di interesse dell'immagine. In questo caso, è necessario applicare algoritmi più sofisticati.

6 Misure di distanza

Dati i pixel

- p, con coordinate (x, y)
- q, con coordinate (s, t)
- z, con coordinate (u, v)

D è una **funzione di distanza** o **metrica** se rispetta i seguenti assiomi:

1. $\mathrm{D}(p, q) \geq 0$
2. simmetria: $\mathrm{D}(p, q) = \mathrm{D}(q, p)$
3. disuguaglianza del triangolo: $\mathrm{D}(p, z) \leq \mathrm{D}(p, q) + \mathrm{D}(q, z)$

Siano $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ due punti.

Nel piano continuo, è definibile la *distanza euclidea*:

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Le distanze che si definiscono invece nel reticolo discreto sono approssimazioni della distanza euclidea:

- **distanza city block**, o **di Manhattan**, o **4-distanza**,

  $$\mathrm{d_T}(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

  che è la funzione distanza per l'intorno a 4;
- **distanza chessboard**, o **8-distanza**,

  $$\mathrm{d}_\infty(A, B) = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$$

  che è la funzione distanza per l'intorno a 8.

Con la distanza euclidea, considerando tutti i punti entro una certa distanza da un punto dato, si definisce un cerchio. Nel reticolo discreto, si ottengono invece delle approssimazioni del cerchio. Ad esempio, considerando i pixel con distanza $d \leq 2$ da un pixel p, si ottiene:

4-distanza

		2		
	2	1	2	
2	1	p	1	2
	2	1	2	
		2		

8-distanza

2	2	2	2	2
2	1	1	1	2
2	1	p	1	2
2	1	1	1	2
2	2	2	2	2