Azzolini Riccardo 2020-05-11

Risoluzione – Correttezza e completezza

1 Correttezza della risoluzione

Proposizione: Il risolvente $\mathcal{R}$ di $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ (rispetto a L) è conseguenza logica dell'insieme di clausole $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2\}$.

Dimostrazione: Sia v una valutazione che soddisfa le due clausole: $v \models \mathcal{C}_1$ e $v \models \mathcal{C}_2$. Bisogna dimostrare che allora anche $v \models \mathcal{R}$.

Innanzitutto, si ricorda che una clausola $\mathcal{C} = \{l_1, \dots, l_n\}$ è soddisfatta da una valutazione quando esiste almeno un letterale in $\mathcal{C}$ che è verificato da tale valutazione:

$$v \models \mathcal{C} \quad \text{se} \quad \widetilde{\exists} j : v \models l_j$$

Da ciò, si deduce che esistono due letterali $M \in \mathcal{C}_1$ e $N \in \mathcal{C}_2$ tali che $v(M) = v(N) = 1$.

Se questi due letterali fossero quelli a cui si è applicata la regola di risoluzione, $M = L$ e $N = \overline{L}$, allora non potrebbero essere entrambi soddisfatti da v, essendo uno la negazione dell'altro. Dunque, $M \neq L$ oppure $N \neq \overline{L}$, e quindi, per la definizione di risolvente, almeno uno tra M e N deve appartenere a $\mathcal{R}$. Di conseguenza, $\mathcal{R}$ contiene almeno un letterale soddisfatto da v, ovvero $v \models \mathcal{R}$.

2 Equivalenza tra risolti e risolvente

Considerando un'applicazione della regola di risoluzione,

$$\frac{\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}', L \qquad \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}'', \overline{L}}{\mathcal{R} = C', C''}\ \text{ris}$$

si ottiene che

$$\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2\} \equiv \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{R}\}$$

perché:

- $\mathcal{R}$ è conseguenza logica di $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2\}$, quindi ogni valutazione che rende vero $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2\}$, soddisfa anche $\mathcal{R}$, e dunque $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{R}\}$;
- viceversa, per definizione, una valutazione soddisfa l'insieme $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{R}\}$ se soddisfa tutte le clausole dell'insieme, e allora essa rende vero anche $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2\}$.

Se $\mathcal{R} = \Box$ (la clausola vuota), che è insoddisfacibile, allora $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{R}\}$ è insoddisfacibile. Così, dall'equivalenza logica appena stabilita, si deduce che è insoddisfacibile anche $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2\}$ (e, per estensione, qualunque insieme $\mathcal{S}$ di clausole contenente sia $\mathcal{C}_1$ che $\mathcal{C}_2$). Si ha allora il seguente corollario della proposizione di correttezza della risoluzione:

Corollario: Se il risolvente di una coppia di clausole $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \in \mathcal{S}$ è $\Box$, allora $\mathcal{S}$ è insoddisfacibile.

2.1 Esempio

Si consideri la formula in CNF

$$S = X \land (\neg X \lor Y) \land \neg Y$$

che corrisponde all'insieme di clausole

$$\mathcal{S} = \{\{X\}, \{\neg X, Y\}, \{\neg Y\}\}$$

Applicando la risoluzione alla prima e alla seconda clausola, rispetto al letterale X, si ottiene

$$\frac{\{X\} \qquad \{\neg X, Y\}}{\{Y\}}\,\text{ris}$$

quindi:

$$\mathcal{S} \equiv \Big\{\underbrace{\{X\}, \{\neg X, Y\}, \{\neg Y\}}_{\mathcal{S}}, \{Y\}\Big\}$$

Adesso, ragionando su questo nuovo insieme di clausole, si applica ancora la risoluzione,

$$\frac{\{Y\} \qquad \{\neg Y\}}{\Box}\,\text{ris}$$

deducendo così l'equivalenza logica

$$\mathcal{S} \equiv \Big\{\underbrace{\{X\}, \{\neg X, Y\}, \{\neg Y\}}_{\mathcal{S}}, \{Y\}\Big\} \equiv \Big\{\underbrace{\{X\}, \{\neg X, Y\}, \{\neg Y\}}_{\mathcal{S}}, \{Y\}, \Box\Big\}$$

Siccome quest'ultimo insieme è insoddisfacibile, lo è anche l'insieme di partenza $\mathcal{S}$, e quindi la formula S:

$$\widetilde{\forall} v \colon v \not\models X \land (\neg X \lor Y) \land \neg Y$$

3 Derivazione per risoluzione

Definizione: Una clausola $\mathcal{C}$ è **derivabile per risoluzione** da un insieme di clausole $\mathcal{S}$ se esiste una sequenza $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ di clausole tale che:

- $\mathcal{C}_n = \mathcal{C}$
- $\widetilde{\forall} i = 1, \dots, n$ si ha che:
  - $\mathcal{C}_i \in \mathcal{S}$,
  - oppure $\mathcal{C}_i$ è la conclusione della regola di risoluzione applicata a due clausole $\mathcal{C}_j, \mathcal{C}_k$ della sequenza, con $j < i$ e $k < i$.

Per indicare che $\mathcal{C}$ è derivabile per risoluzione da $\mathcal{S}$, si scrive $\mathcal{S} \vdash_{\mathrm{R}} \mathcal{C}$.

4 Refutazione

Definizione: Una **refutazione** di $\mathcal{S}$ è una derivazione della clausola vuota $\square$ da $\mathcal{S}$. $\mathcal{S}$ è **refutabile** se $\mathcal{S} \vdash_{\mathrm{R}} \square$.

4.1 Esempio

Come nell'esempio precedente, si considera la formula

$$S = X \land (\neg X \lor Y) \land \neg Y$$

che corrisponde all'insieme di clausole

$$\mathcal{S} = \{\{X\}_1, \{\neg X, Y\}_2, \{\neg Y\}_3\}$$

(qui numerate per potervisi riferire facilmente nella derivazione).

Si ha $\mathcal{S} \vdash_{\mathrm{R}} \square$, cioè esiste una refutazione (derivazione di $\square$ da $\mathcal{S}$), data (ad esempio) dalla sequenza:

$$\begin{array}{lll}
(1) & \{X\} & \text{clausola 1 in } \mathcal{S} \\
(2) & \{\neg X, Y\} & \text{clausola 2 in } \mathcal{S} \\
(3) & \{Y\} & \dfrac{\{X\} \qquad \{\neg X, Y\}}{\{Y\}}\,\text{ris} \\
(4) & \{\neg Y\} & \text{clausola 3 in } \mathcal{S} \\
(5) & \square & \dfrac{\{Y\} \qquad \{\neg Y\}}{\square}\,\text{ris}
\end{array}$$

5 Teorema di validità e completezza

Teorema: $\mathcal{S} \vdash_{\mathrm{R}} \square$ se e solo se $\mathcal{S}$ è insoddisfacibile (in altre parole, $\mathcal{S}$ è refutabile se e solo se è insoddisfacibile).

Da questo teorema seguono immediatamente due corollari, che permettono di usare il metodo di risoluzione per determinare anche

- se vale una conseguenza logica:

  Corollario: Siano Γ un insieme di formule, H una formula e $\mathcal{S}$ l'insieme di clausole corrispondente all'insieme di formule $\Gamma \cup \{\neg H\}$.

  $$\Gamma \models H \quad \text{sse} \quad \mathcal{S} \vdash_{\mathrm{R}} \square$$

- se una formula è una tautologia:

  Corollario: Siano H una formula e $\mathcal{S}$ l'insieme di clausole corrispondente a $\neg H$.

  $$\models H \quad \text{sse} \quad \mathcal{S} \vdash_{\mathrm{R}} \square$$

5.1 Verifica di una tautologia

Il procedimento completo per verificare se una formula A è una tautologia usando il metodo di risoluzione è il seguente:

1. si considera la sua negazione $\neg A$ (perché A è una tautologia se e solo se $\neg A$ è insoddisfacibile);
2. si trasforma $\neg A$ in una CNF C_A;
3. si considera l'insieme di clausole $\mathcal{S}_A$ corrispondente a C_A;
4. si applica la risoluzione per verificare se $\mathcal{S}_A \vdash_{\mathrm{R}} \square$: se si riesce a derivare la clausola vuota, allora $\mathcal{S}_A$ è insoddisfacibile, e quindi $\neg A$ è insoddisfacibile, ovvero A è una tautologia.