Azzolini Riccardo 2019-03-19

Successioni

1 Successione

Una **successione** è una funzione il cui dominio è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\to f(n) = a_n \end{aligned}$$

Generalmente, una successione, invece che con $f(n)$, si indica con $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (o semplicemente $\{a_n\}$), che rappresenta anche il suo insieme immagine.

a_n si chiama **termine generale** della successione.

1.1 Esempi

- $\{a_n\}$ tale che $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

$$a_0 = 0,\ a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{2}{3},\ a_3 = \frac{3}{4},\ \dots$$

- $a_n = (-1)^n$

$$a_0 = 1,\ a_1 = -1,\ a_2 = 1,\ a_3 = -1,\ \dots$$

2 Successioni crescenti e decrescenti

Una successione è **crescente** (**decrescente**) se

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \le a_{n+1} \ (a_n \ge a_{n+1})$$

Se la disuguaglianza è stretta, $\{a_n\}$ si dice **strettamente crescente** (**strettamente decrescente**).

2.1 Esempio

$$a_n = \frac{n-1}{n+1} = \frac{n+1-2}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}$$
$$a_{n+1} = 1 - \frac{2}{n+2}$$

$$\begin{aligned} n+1 &< n+2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{n+1} &> \frac{1}{n+2} \\ \frac{2}{n+1} &> \frac{2}{n+2} \\ -\frac{2}{n+1} &< -\frac{2}{n+2} \\ 1-\frac{2}{n+1} &< 1-\frac{2}{n+2} \\ a_n &< a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

quindi la successione è strettamente crescente.

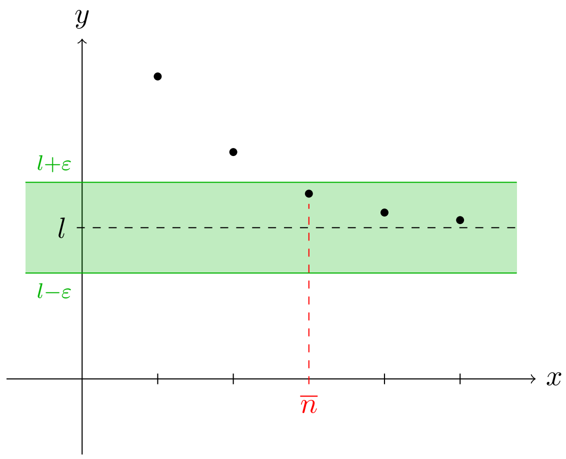
3 Limiti di successioni

$+\infty$ è l'unico punto di accumulazione per $\mathbb{N}$, quindi l'unico limite che ha senso calcolare per una successione è

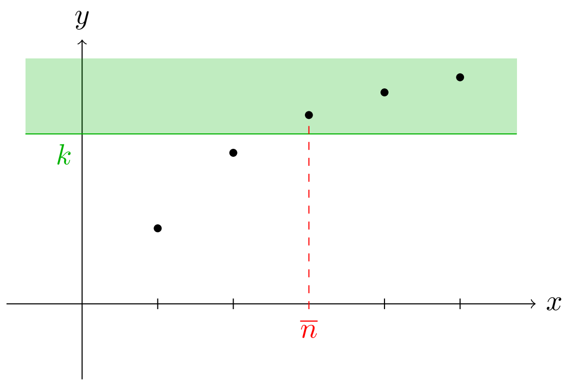
$$\lim_{n \to +\infty} a_n$$

Definizione: Sia a_n una successione.

- $\lim_{n \to +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - l| < \varepsilon$, cioè $a_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$, $\forall n \geq \overline{n}$.



- $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ se $\forall k \in \mathbb{R}\ \exists \overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > k\ \forall n \geq \overline{n}$.



- $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ se $\forall k \in \mathbb{R}\ \exists \overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_n < k\ \forall n \geq \overline{n}$.

Osservazione: Non è detto che esista il limite di una successione. Ad esempio:

$$\nexists \lim_{n\to+\infty} (-1)^n$$

4 Successioni convergenti e divergenti

Una successione $\{a_n\}$ si dice

- **convergente** se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$;
- **divergente** se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \pm\infty$.

5 Teoremi dei limiti

I teoremi dei limiti di funzioni valgono anche per le successioni. Alcuni esempi sono:

- **Unicità del limite**.
- **Permanenza del segno**: Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}^*$, allora
  - $l > 0 \implies \exists \overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > 0 \quad \forall n \geq \overline{n}$;
  - $l < 0 \implies \exists \overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_n < 0 \quad \forall n \geq \overline{n}$.
- **Teorema del confronto**: Siano $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ tre successioni tali che $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente per $n \to +\infty$. Se

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = l \in \mathbb{R}^*$$

  allora anche

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = l$$

- *Proposizione*: Una successione convergente è definitivamente limitata.

  Osservazione: Il viceversa non è vero. Ad esempio, $a_n = (-1)^n$ è definitivamente limitata, ma non ammette limite.

6 Limiti elementari

Sia $r \in \mathbb{R}$, $a_n = r^n$.

$$\lim_{n\to+\infty} r^n \begin{cases} = +\infty & \text{se } r > 1 \\ = 1 & \text{se } r = 1 \\ = 0 & \text{se } -1 < r < 1, \text{ cioè } |r| < 1 \\ \nexists & \text{se } r \leq -1 \end{cases}$$

Sia $a > 0$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} &= \lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}} = a^0 = 1 \\
\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} &= \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} e^{\log n^{\frac{1}{n}}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\log n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\log n}{n}} \\
&= e^0 = 1
\end{aligned}
$$

In generale, con $\alpha > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$$

7 Limite di $\frac{a^n}{n!}$

Proposizione: Sia $a > 0$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

Ciò significa che $n!$ è un infinito di ordine superiore rispetto all'esponenziale.[1]

Dimostrazione: Se $0 < a < 1$, il numeratore tende a 0, e se $a = 1$ esso vale 1, perciò il limite non è una forma indeterminata e la dimostrazione è banale.

Sia invece $a > 1$. Si ha allora una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$.

Espandendo l'esponenziale e il fattoriale, si ottiene

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \cdots \cdot \frac{a}{n}$$

Osservazione: L'ultimo fattore, $\frac{a}{n}$, tende a 0, mentre i fattori precedenti $\frac{a}{k}$ hanno valori finiti $\neq 0$, ma ce ne sono $n - 1 \to +\infty$, quindi il limite non è 0: si ha invece una forma indeterminata $\infty \cdot 0$.

Siccome

[1] Esiste anche l'infinito n^n, che è di ordine superiore rispetto a $n!$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a}{n}=0 \implies \exists\overline{n}\in\mathbb{N} \text{ tale che } \frac{a}{n}<\frac{1}{2} \quad \forall n\geq\overline{n}$$

vale la disuguaglianza

$$\begin{aligned}
\frac{a^n}{n!} &= \frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdot\dots\cdot\underbrace{\frac{a}{\overline{n}}}_{<\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\frac{a}{\overline{n}+1}}_{<\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\frac{a}{\overline{n}+2}}_{<\frac{1}{2}}\cdot\dots\cdot\underbrace{\frac{a}{n}}_{<\frac{1}{2}} \\
&< \frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdot\dots\cdot\frac{a}{\overline{n}-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-(\overline{n}-1)} \\
&= \underbrace{\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdot\dots\cdot\frac{a}{\overline{n}-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\overline{n}}}_{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \\
&= k\left(\frac{1}{2}\right)^{n}
\end{aligned}$$

dove k è costante perché il valore di $\overline{n}$ non dipende da n.

$$0<\frac{a^n}{n!}<k\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}k\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=0$$

e di conseguenza, per il teorema del confronto,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!}=0 \qquad \square$$

8 Limiti di successioni monotone

Teorema: Sia $\{a_n\}$ una successione monotona. Allora $\exists\lim_{n\to+\infty}a_n$ e, inoltre:

- se $\{a_n\}$ è limitata, il limite è finito (successione convergente);
- se $\{a_n\}$ è illimitata, il limite è infinito (successione divergente).

Dimostrazione: Sia $\{a_n\}$ monotona crescente (la dimostrazione è analoga nel caso decrescente):

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Se $\{a_n\}$ è limitata, sia $L = \sup\{a_n\}$, $L \in \mathbb{R}$. Per la definizione di estremo superiore:
  - L è un maggiorante di $\{a_n\}$, cioè $a_n \leq L \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
  - $\forall \varepsilon > 0$, $L - \varepsilon$ non è più un maggiorante di $\{a_n\}$, ovvero $\exists \overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_{\overline{n}} > L - \varepsilon$.

  Poiché la successione è crescente, $\forall n \geq \overline{n}$ si ha che $a_{\overline{n}} \leq a_n$, e quindi

  $$L - \varepsilon < a_{\overline{n}} \leq a_n \leq L < L + \varepsilon$$

  Ricapitolando, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \quad \forall n \geq \overline{n}$, che per definizione significa

  $$\lim_{n \to +\infty} a_n = L$$

- Se $\{a_n\}$ è illimitata (superiormente, essendo crescente), vuol dire che $\forall k > 0 \quad \exists \overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_{\overline{n}} > k$.

  Allora, $\forall n \geq \overline{n}$, vale $a_n \geq a_{\overline{n}} > k$, che implica

  $$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \qquad \square$$

Osservazione: Il teorema vale anche per successioni che sono solo *definitivamente* monotone.