Azzolini Riccardo 2020-04-29

Calcolo alla Hilbert

1 Sistemi deduttivi

I metodi che permettono di stabilire se una formula ha una certa proprietà (tipicamente, se è una tautologia, o se è soddisfacibile) senza fare riferimento alla semantica prendono il nome di **sistemi deduttivi** (o *calcoli logici*, o *sistemi di prova*). In questo ambito, si parla di:

dimostrazioni: gli oggetti che certificano una proprietà semantica (ad esempio la verità) di una formula;

teoremi: le formule di cui le dimostrazioni asseriscono la verità (o, in generale, la proprietà semantica considerata).

Ad esempio, il calcolo a tableaux $\mathrm{T}_{\mathrm{CPL}}$ è un sistema deduttivo in cui:

- le *dimostrazioni* sono i tableaux chiusi di formule negate $\neg H$;
- i *teoremi* sono le formule H per cui esiste una dimostrazione, ricordando che

$$\begin{aligned} \neg H \text{ ha un tableau chiuso} &\iff \neg H \text{ è insoddisfacibile} \\ &\iff H \text{ è una tautologia} \end{aligned}$$

In letteratura, esistono varie tipologie di sistemi deduttivi (calcoli a tableaux, calcoli alla Hilbert, calcoli a sequenti, deduzione naturale, risoluzione, ecc.), che hanno caratteristiche e applicazioni diverse (studio delle proprietà della logica, dimostrazione automatica, dimostrazione semi-automatica).

2 Calcoli alla Hilbert

Tra i vari sistemi deduttivi, i **calcoli alla Hilbert**, detti anche **sistemi assiomatici**, hanno un ruolo particolarmente importante, per due ragioni:

- sono uno dei sistemi deduttivi più facilmente applicabili a logiche diverse;
- sono la formalizzazione del processo di ragionamento – introdotto da Euclide nel III secolo a.C., con i suoi trattati di geometria (*Elementi*) – che parte da un insieme di formule assunte intuitivamente come verità (**assiomi** o **postulati**) e, da queste, dimostra i teoremi utilizzando un insieme molto limitato di meccanismi di ragionamento.

2.1 Il caso della geometria euclidea

I postulati degli *Elementi* di Euclide sono i seguenti (che egli assume veri sulla base dell'osservazione del mondo reale):

- (I) Tra due punti qualsiasi è possibile tracciare una e una sola retta.
- (II) Si può prolungare un segmento oltre i due punti indefinitamente.
- (III) Dato un punto e una lunghezza, è possibile descrivere un cerchio.
- (IV) Tutti gli angoli retti sono congruenti tra loro.
- (V) Per un punto esterno a una retta data passa una e una sola retta parallela a questa.

A partire da questi postulati, utilizzando un insieme limitato di schemi di ragionamento (principi logici) "evidentemente corretti", Euclide sviluppa le dimostrazioni dei teoremi che costituiscono il "cuore" della geometria piana, a partire dalla quale si sviluppa poi la geometria solida.

Seppur rigoroso, l'approccio di Euclide non è del tutto formale, in quanto si basa su alcune nozioni *intuitive* non definite: ad esempio, cosa sia un punto, o una lunghezza, ecc. Perciò, alla fine del XIX secolo, quando si inizia a prestare attenzione a tutti gli elementi formali che caratterizzano i fondamenti della matematica, nasce la necessità di una trattazione formale di questi argomenti.

Questo lavoro di formalizzazione viene realizzato da David Hilbert, che nel 1899 propone un sistema assiomatico, costituito da 21 assiomi, che formalizza completamente la geometria euclidea. L'obiettivo di Hilbert era mostrare la correttezza del (V) postulato,[1] che riteneva potesse essere una conseguenza dei primi 4, e quindi superfluo. In realtà, si scoprirà in seguito che, mantenendo i postulati (I)–(IV) e aggiungendo una qualche negazione del (V), si ottengono ancora dei sistemi coerenti, che descrivono dei "mondi possibili" (e hanno anche delle applicazioni, ad esempio nell'ambito della fisica). I principali sono:

- la *geometria iperbolica*: data una retta r e un punto P disgiunto da r, esistono almeno due rette distinte passanti per P e parallele a r;
- la *geometria ellittica*: due rette qualsiasi di un piano hanno sempre almeno un punto in comune (cioè non esistono rette parallele).

[1] Il problema di studiare il (V) postulato nasce dal fatto che, mentre gli (I)–(IV) rappresentano fatti intuitivi che si possono in qualche modo verificare osservando una parte finita del piano, il (V) parla di rette parallele, che non si incontrano mai, cioè coinvolge l'infinito, e risulta perciò meno intuitivo.

3 Un calcolo alla Hilbert per la CPL

In generale, un calcolo alla Hilbert è costituito da un **insieme di assiomi** e da un **insieme di regole di deduzione** (solitamente, quest'ultimo è molto piccolo). Per la logica proposizionale classica, si definisce ad esempio il seguente calcolo, caratterizzato da quattro assiomi e una regola:

Definizione (calcolo $\mathrm{H_{CPL}}$): Gli assiomi della logica proposizionale sono:[2]

1. $p \to (q \to p)$
2. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$
3. $\neg p \to (p \to q)$
4. $(p \to q) \to ((\neg p \to q) \to q)$

La sola regola di deduzione è il **modus ponens** (**MP**): da A e $A \to B$ si ricava B. Questa regola può anche essere scritta come:

$$\frac{A \to B \qquad A}{B}\,\mathrm{MP}$$

Osservazioni:

- In questa formalizzazione, non si prende in considerazione la costante $\perp$. Questo simbolo può invece essere definito come abbreviazione di una formula insoddisfacibile (ad esempio, $\perp = p \wedge \neg p$).
- È possibile formulare calcoli equivalenti con insiemi diversi di assiomi (mantenendo invece fissa la regola del modus ponens): quello appena introdotto è solo uno dei possibili calcoli alla Hilbert per la logica proposizionale classica.

3.1 Dimostrazioni e teoremi

Definizione: Una **dimostrazione** in $\mathrm{H_{CPL}}$ (ma anche, in generale, in tutti i calcoli alla Hilbert) di una formula H è una sequenza di formule $H_1, \dots, H_n$ tale che:

- $H_n = H$, cioè l'ultima formula della sequenza è quella dimostrata;
- $\widetilde{\forall} i = 1, \dots, n$, la formula H_i
  - o è un'istanza di un assioma,[3]

[2] Questi assiomi sono tutti tautologie (ciò può essere verificato mediante le tavole di verità, oppure utilizzando un altro sistema deduttivo, come ad esempio il calcolo a tableaux).

[3] Le istanze degli assiomi sono ottenute applicando delle sostituzioni alle formule degli assiomi. Come visto in precedenza, qualunque sostituzione di formule alle variabili proposizionali di una tautologia dà ancora una tautologia, quindi è lecito considerare istanze arbitrarie degli assiomi nella costruzione delle dimostrazioni.

– oppure è ottenuta applicando la regola di modus ponens a due formule H_j, H_k, con $j, k < i$ (cioè che vengono prima nella sequenza).[4]

Osservazione: A differenza dei calcoli a tableaux (e di altri sistemi deduttivi), dove le dimostrazioni erano alberi, nel caso dei calcoli alla Hilbert esse hanno una struttura lineare, sulla quale è più facile ragionare (ma costruire in pratica le dimostrazioni risulta invece piuttosto difficile). Questo è uno dei motivi per cui, da un punto di vista tecnico, i calcoli alla Hilbert risultano "comodi".

Definizione: Una formula A è un **teorema** di $\mathrm{H_{CPL}}$ se esiste una dimostrazione di A.

Per indicare che A è un teorema di $\mathrm{H_{CPL}}$, si usa la notazione $\vdash_{\mathrm{H_{CPL}}} A$ (a parte il riferimento a $\mathrm{H_{CPL}}$, $\vdash A$ è la notazione standard usata in tutti i sistemi deduttivi, per indicare appunto che A è un teorema nel sistema preso in considerazione).

3.1.1 Esempio

Come esempio, è mostrata in seguito la dimostrazione della *consequentia mirabilis*, $(\neg A \to A) \to A$. Indicando con $\mathrm{Ax1}, \mathrm{Ax2}, \mathrm{Ax3}, \mathrm{Ax4}$ le formule degli assiomi,

$$
\begin{array}{ll}
(\mathrm{Ax1}) & p \to (q \to p) \\
(\mathrm{Ax2}) & (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)) \\
(\mathrm{Ax3}) & \neg p \to (p \to q) \\
(\mathrm{Ax4}) & (p \to q) \to ((\neg p \to q) \to q)
\end{array}
$$

e con $\mathrm{MP}(j)(k)$ l'applicazione del modus ponens alle formule H_j e H_k, la dimostrazione può essere scritta come segue:

1. $(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$
   Istanza di un assioma: $\mathrm{Ax2}[A/p, (A \to A)/q, A/r]$
2. $A \to ((A \to A) \to A)$
   Istanza di un assioma: $\mathrm{Ax1}[A/p, (A \to A)/q]$
3. $((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$
   Modus ponens: $\mathrm{MP}(1)(2)$
4. $(A \to (A \to A))$
   Istanza di un assioma: $\mathrm{Ax1}[A/p, A/q]$
5. $(A \to A)$
   Modus ponens: $\mathrm{MP}(3)(4)$
6. $(A \to A) \to ((\neg A \to A) \to A)$
   Istanza di un assioma: $\mathrm{Ax4}[A/p, A/q]$

[4] Siccome, per poter applicare il modus ponens, bisogna avere almeno due formule precedenti nella sequenza, le prime due formule di ogni dimostrazione sono sempre istanze di assiomi.

7. $(\neg A \to A) \to A$
   Modus ponens: MP(5)(6)

Quindi $\vdash_{\mathrm{H_{CPL}}} (\neg A \to A) \to A$.

3.2 Completezza

Teorema (correttezza e completezza): Una formula H è una tautologia se e solo se è un teorema di $\mathrm{H_{CPL}}$:

$$\models H \iff \vdash_{\mathrm{H_{CPL}}} H$$

Osservazione: La dimostrazione della correttezza / validità di $\mathrm{H_{CPL}}$ (se H è un teorema, allora è una tautologia) è abbastanza semplice: sostanzialmente, bisogna prima mostrare che gli assiomi sono tautologie, e che applicando il modus ponens a due tautologie si ottiene una tautologia, e poi ragionare per induzione sulla lunghezza delle dimostrazioni. Invece, dimostrare la completezza (cioè verificare che ogni tautologia è dimostrabile) è un po' più complicato (più o meno come la dimostrazione della completezza di $\mathrm{T_{CPL}}$).

4 Comodità dei calcoli alla Hilbert

I calcoli alla Hilbert non sono affatto "comodi" per dimostrare teoremi, in quanto hanno una struttura molto rigida, e, in generale, "indovinare" le istanze di assiomi da cui partire non è facile.

Invece, essi sono comodi per ragionare sulle proprietà del sistema deduttivo, perché, come già detto, la struttura delle prove è molto semplice (lineare, invece che ad albero). In particolare, per dimostrare una proprietà delle dimostrazioni, è sufficiente far vedere che:

- vale per gli assiomi,
- è preservata dall'applicazione dell'unica regola (modus ponens).

Infine, i calcoli alla Hilbert sono applicabili a una varietà di logiche molto più ampia di quella a cui sono applicabili gli altri calcoli.