Azzolini Riccardo 2018-09-27

Prodotto cartesiano e logica

1 Coppia

Una **coppia** è un'insieme del tipo $\{a, \{a, b\}\}$ e si indica con (a, b).

Nelle coppie è importante l'ordine:

$$(a, b) = \{a, \{a, b\}\}$$
$$(b, a) = \{b, \{a, b\}\}$$
$$(a, b) \neq (b, a)$$

In una coppia (a, b)

- a si chiama **prima componente**
- b si chiama **seconda componente**

2 Prodotto cartesiano

Dati due insiemi A e B, il loro prodotto cartesiano $A \times B$ è l'insieme di tutte le coppie (a, b) dove a è un elemento di A e b è un elemento di B.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$$

2.1 Cardinalità

Se $|A| = n$ e $|B| = m$, allora $|A \times B| = n \cdot m$.

2.2 Esempio

$$A = \{x, y, z\}$$
$$B = \{\circ, *\}$$

$$A \times B = \{(x, \circ), (x, *), (y, \circ), (y, *), (z, \circ), (z, *)\}$$
$$B \times A = \{(\circ, x), (*, x), (\circ, y), (*, y), (\circ, z), (*, z)\}$$
$$A \times B \neq B \times A$$
$$|A \times B| = |B \times A| = |A| \cdot |B| = 3 \cdot 2 = 6$$

3 Insiemi e logica matematica

$\{x \mid P(x)\}$ è l'insieme degli elementi x che soddisfano la proprietà P.

Una proprietà P può essere *soddisfatta* o meno da un certo elemento. Ad esempio, se P è "essere pari", allora:

- $P(4) = \text{VERO} = 1$, quindi $4 \in \{\text{numeri pari}\}$
- $P(3) = \text{FALSO} = 0$, quindi $3 \notin \{\text{numeri pari}\}$

Dati una proprietà P e un elemento x, $P(x)$, che si legge "x soddisfa la proprietà P" oppure "vale $P(x)$", è una *proposizione*, cioè una frase che deve necessariamente essere vera o falsa.

4 Connettivi logici

I **connettivi logici** sono operatori delle proposizioni logiche.

Sono strettamente correlati alle operazioni insiemistiche.

4.1 Negazione

Data una proposizione $P(x)$, la sua **negazione** NOT $P(x)$ è la proposizione che

- è vera quando $P(x)$ è falsa
- è falsa quando $P(x)$ è vera

4.1.1 Tavola di verità

$P(x)$	NOT $P(x)$
0	1
1	0

4.1.2 Operazione insiemistica: complemento assoluto

La negazione corrisponde al **complemento assoluto** di un insieme. Dato un'insieme A, il suo complemento assoluto $\overline{A}$ è l'insieme di tutti gli elementi non appartenenti ad A. Se l'insieme A è costituito da tutti gli elementi che soddisfano la proprietà P, il suo complemento contiene quindi gli elementi che non la soddisfano:

$$A = \{x \mid P(x)\}$$
$$\overline{A} = \{x \mid \textsc{not}\ P(x)\}$$

4.2 Congiunzione

Date due proposizioni $P(x)$ e $Q(x)$, la loro **congiunzione** $P(x)$ AND $Q(x)$ è la proposizione che

- è vera se $P(x)$ e $Q(x)$ sono entrambe vere
- è falsa in tutti gli altri casi

4.2.1 Tavola di verità

$P(x)$	$Q(x)$	$P(x)$ AND $Q(x)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

4.2.2 Operazione insiemistica: intersezione

La congiunzione corrisponde all'intersezione di due insiemi A e B, dato che ciascun elemento dell'intersezione deve appartenere ad A *e* a B:

$$A = \{x \mid P(x)\}$$
$$B = \{x \mid Q(x)\}$$
$$A \cap B = \{x \mid P(x)\ \textsc{and}\ Q(x)\}$$

4.3 Disgiunzione

Date due proposizioni $P(x)$ e $Q(x)$, la loro **disgiunzione** $P(x)$ OR $Q(x)$ è la proposizione che

- è vera se almeno una delle due proposizioni è vera
- è falsa se $P(x)$ e $Q(x)$ sono entrambe false

4.3.1 Tavola di verità

$P(x)$	$Q(x)$	$P(x)$ OR $Q(x)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

4.3.2 Operazione insiemistica: unione

La disgiunzione corrisponde all'unione di due insiemi A e B, dato che ogni elemento dell'unione deve appartenere almeno ad A *o* a B:

$$A = \{x \mid P(x)\}$$
$$B = \{x \mid Q(x)\}$$
$$A \cup B = \{x \mid P(x) \text{ OR } Q(x)\}$$

4.4 Implicazione

Date due proposizioni $P(x)$ e $Q(x)$, l'implicazione $P(x) \to Q(x)$ o $P(x) \implies Q(x)$ (si legge "se $P(x)$ allora $Q(x)$") è la proposizione che

- è falsa se $P(x)$ è vera e $Q(x)$ è falsa
- è vera in tutti gli altri casi

4.4.1 Tavola di verità

$P(x)$	$Q(x)$	$P(x) \to Q(x)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

4.4.2 Operazione insiemistica: inclusione

L'implicazione corrisponde all'inclusione dell'insieme A nell'insieme B, dato che ogni elemento di A (che, per definizione, soddisfa la proprietà P) deve appartenere anche a B (e quindi deve soddisfare anche Q):

$$A = \{x \mid P(x)\}$$
$$B = \{x \mid Q(x)\}$$

$$A \subseteq B \text{ se e solo se } P(x) \to Q(x) \text{ per ogni } x$$

4.4.3 Contronominale e inclusione dei complementi

Se vale l'implicazione $P(x) \to Q(x)$, allora vale anche la sua **contronominale** $\textsc{not}\ Q(x) \to \textsc{not}\ P(x)$.

Utilizzando la contronominale si può dimostrare che, dati due insiemi A e B, se $A \subseteq B$ allora $\overline{B} \subseteq \overline{A}$:

$$A = \{x \mid P(x)\}$$
$$B = \{x \mid Q(x)\}$$

$$A \subseteq B, \text{ quindi } P(x) \to Q(x) \text{ e } \textsc{not}\ Q(x) \to \textsc{not}\ P(x)$$

$$\overline{A} = \{x \mid \textsc{not}\ P(x)\}$$
$$\overline{B} = \{x \mid \textsc{not}\ Q(x)\}$$

$$\textsc{not}\ Q(x) \to \textsc{not}\ P(x), \text{ quindi } \overline{B} \subseteq \overline{A}$$

Infatti, se A è incluso in B, tutti gli elementi esterni a B, che quindi appartengono a $\overline{B}$, non potranno certo appartenere ad A, e perciò saranno anche elementi di $\overline{A}$.

4.4.4 Esempio

$$X = \{\text{persone in quest'aula}\}$$

$$P(x) \text{ è vera se } x \text{ ha meno di 21 anni}$$

$$S(x) \text{ è vera se } x \text{ è uno studente}$$

1. $P(x) \rightarrow S(x)$ è vera: ogni persona in quest'aula che ha meno di 21 anni è uno studente.
2. NOT $S(x) \rightarrow$ NOT $P(x)$ (la contronominale della 1) è vera: ogni persona in quest'aula che non è uno studente non ha meno di 21 anni (supponendo che nell'aula, oltre agli studenti, sia presente solo il docente, che non ha meno di 21 anni).
3. $S(x) \rightarrow P(x)$ è falsa: non è vero che ogni studente in quest'aula ha meno di 21 anni.
4. NOT $P(x) \rightarrow$ NOT $S(x)$ (la contronominale della 3) è falsa: non è vero che ogni persona in quest'aula che non ha meno di 21 anni non è uno studente (o, semplificando la frase, che ogni persona di almeno 21 anni in quest'aula non è uno studente).

5 Negazione dei quantificatori

La negazione di una proposizione con il **quantificatore esistenziale** ($\exists$) si può esprimere in modo equivalente attraverso il **quantificatore universale** ($\forall$), e viceversa:

$$\text{NOT } (\exists x P(x)) = \forall x(\text{NOT } P(x))$$

$$\text{NOT } (\forall x P(x)) = \exists x(\text{NOT } P(x))$$

6 Doppia inclusione e coimplicazione

Dati due insiemi $A = \{x \mid P(x)\}$ e $B = \{x \mid Q(x)\}$, se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, allora $A = B$ (**doppia inclusione**).

L'equivalente logico della doppia inclusione è la **coimplicazione**, $P(x) \iff Q(x)$, che si legge "se e solo se".

6.1 Esempio

$$n \text{ è pari} \implies n \text{ è multiplo di } 2$$
$$n \text{ è multiplo di } 2 \implies n \text{ è pari}$$

$$n \text{ è pari} \iff n \text{ è multiplo di } 2$$

$$P = \{\text{numeri pari}\}$$
$$Q = \{\text{multipli di } 2\}$$

$$P \subseteq M \text{ e } M \subseteq P$$
$$P = M$$