Azzolini Riccardo 2019-02-25

Funzioni

1 Funzione

Siano $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Una legge che associa ad ogni elemento $x \in X$ *uno* e *un solo* elemento $y \in Y$ si dice **funzione** da X in Y e si scrive

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\to y = f(x) \end{aligned}$$

- X è il **dominio** di f.
- Y è il **codominio** di f. Di solito si sceglie $Y = \mathbb{R}$.

2 Immagine

L'**immagine** di $f : X \to Y$ è

$$\mathrm{Im}(f) = f(X) = \{y \in Y : \exists x \in X,\, y = f(x)\}$$

2.1 Esempi

- $f(x) = x$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to y = x \end{aligned}$$

$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

- $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to x^2 \end{aligned}$$

$$f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$$

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$$f : X \to \mathbb{R} \quad \text{con } X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$
$$f(X) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

- $f(x) = \sqrt{x}$

$$f : X \to \mathbb{R} \quad \text{con } X = [0, +\infty)$$
$$f(X) = [0, +\infty)$$

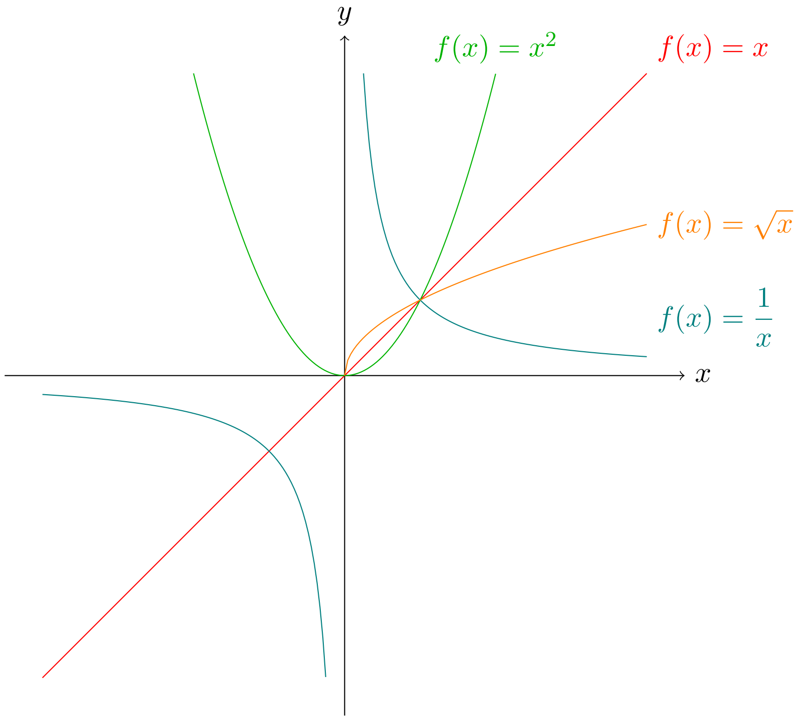
3 Grafico

Sia $f : X \to Y$. Il **grafico** di f è

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$$

dove $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

3.1 Esempi



4 Funzioni limitate

Sia $f : X \to Y$ una funzione. f si dice **limitata superiormente** (**inferiormente**) se $\exists M \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq M$ $(f(x) \geq M)$ $\forall x \in X$, cioè se l'insieme immagine $f(X)$ è limitato superiormente (inferiormente).

Se f è limitata sia superiormente che inferiormente, si dice **limitata**.

5 Massimo e minimo

Sia $f : X \to Y$.

- Un numero $M \in \mathbb{R}$ si dice **massimo** (**globale** o **assoluto**) di f se $\exists x_0 \in X$ tale che $M = f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in X$, cioè se $M = \max f(X)$.
- Un numero $m \in \mathbb{R}$ si dice **minimo** (**globale** o **assoluto**) di f se $\exists x_1 \in X$ tale che $m = f(x_1) \leq f(x) \quad \forall x \in X$, cioè se $m = \min f(X)$.

Osservazione: Massimo e minimo sono unici, ma possono corrispondere a più ascisse.

5.1 Esempi

- $f(x) = x^2$
  $\nexists \max f$
  $\min f = 0, \;\; x_1 = 0$
- $f(x) = \sin x$
  $\max f = 1, \;\; x_0 = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$
  $\max f = 1, \;\; x_0 = \dfrac{3}{2}\pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

6 Funzioni iniettive, suriettive e biiettive

Sia $f : X \to Y$.

- f si dice **iniettiva** se $\forall x_1, x_2 \in X$, con $x_1 \neq x_2$, si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$, o, equivalentemente, se $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.
- Se $f(X) = Y$, f si dice **suriettiva**.
- Se f è sia iniettiva che suriettiva, si dice **biiettiva**.

Osservazione: Se si sceglie come codominio Y l'immagine $f(X)$, allora f è suriettiva.

7 Funzione composta

Siano $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$. Se $f(X) \subseteq Y$,

$$\begin{aligned} g \circ f : X &\to \mathbb{R} \\ x &\to g(f(x)) \end{aligned}$$

si dice **funzione composta**.

Se è possibile considerare sia $g \circ f$ che $f \circ g$, in generale si avrà che $g \circ f \neq f \circ g$.

7.1 Esempi

- $f(x) = x^2 \quad g(x) = x + 1$
  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x^2 + 1$
  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
- $f(x) = \sin x \quad g(x) = 2x^2$
  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2\sin^2 x$
  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x+1)^2 = \sin\left(2x^2\right)$