

Istogramma di un'immagine

1 Istogramma

L'**istogramma** di un'immagine con livelli di grigio nell'intervallo $[0, L-1]$ è una funzione discreta della forma

$$h(r_k) = n_k$$

dove:

- r_k , con $k = 0, \dots, L-1$, è il k -esimo livello di grigio;
- n_k è il numero di pixel con livello di grigio r_k .

In altre parole, l'istogramma di un'immagine associa a ogni livello di grigio il numero di pixel in cui esso occorre (cioè la sua frequenza). L'output dell'istogramma non è quindi un'immagine, bensì una sintesi statistica di un'immagine, che può essere usata, ad esempio, per valutarne il contrasto: più le "barre" sono concentrate in un range ristretto di valori di grigio, più è scarso il contrasto.

A un'immagine corrisponde un unico istogramma, mentre allo stesso istogramma corrispondono più immagini.

2 Istogramma normalizzato

L'**istogramma normalizzato** di un'immagine $M \times N$ è:

$$p(r_k) = \frac{n_k}{MN}$$

La somma delle componenti ("barre") dell'istogramma normalizzato è 1. Esso dà quindi una stima della probabilità di occorrenza di ciascun livello di grigio nell'immagine.

L'istogramma normalizzato può essere utile, ad esempio, per confrontare gli istogrammi di immagini di dimensioni diverse.

3 Thresholding

In particolari condizioni, l'istogramma è utile per eseguire la segmentazione dell'immagine, cioè separare gli oggetti dallo sfondo e/o tra loro.

Se nell'istogramma sono presenti alcune mode ben definite, cioè le barre sono concentrate in più "gruppi" separati, è probabile che queste mode corrispondano ad aree contigue con livelli di grigio (relativamente) uniformi, ciascuna delle quali rappresenta un oggetto o lo sfondo. Allora, per eseguire la segmentazione è sufficiente individuare, nell'istogramma, delle soglie che separano tra loro le varie mode.

Tale procedura si può applicare con buoni risultati soprattutto in situazioni di ambiente controllato (illuminazione costante, ecc.). Infatti, un'illuminazione variabile influenza l'istogramma, interferendo con i livelli di grigio dell'oggetto: alcuni pixel corrispondenti a quest'ultimo potrebbero quindi avere valori che compaiono anche nello sfondo, rendendo impossibile l'uso del thresholding per la segmentazione. In questi casi, servono allora tecniche più complesse.

4 Istogramma cumulato

L'istogramma cumulato, definito dalla funzione

$$H(r_k) = \sum_{x=0}^{r_k} h(x)$$

indica il numero di pixel dell'immagine che hanno valori di grigio minori o uguali a r_k .

Esso si può definire anche in forma normalizzata:

$$P(r_k) = \sum_{x=0}^{r_k} p(x)$$

5 Equalizzazione dell'istogramma

In generale, un'immagine con valori di grigio che occupano l'intero range e sono equamente distribuiti dovrebbe avere un buon contrasto.

L'operatore di **equalizzazione dell'istogramma** è un operatore puntuale che trasforma i livelli di grigio per cercare di rendere uniforme l'istogramma. Esso è formulato nel continuo, e viene approssimato nel discreto.

5.1 Formulazione

Dato l'istogramma $h_i(x)$ di un'immagine, si vuole ricavare una trasformazione puntuale da applicare a tale immagine per rendere uniforme l'istogramma di output, $h_o(y)$. La trasformazione è rappresentata, nel continuo, da una funzione $y = f(x)$, che deve:

- essere monotona crescente, per preservare l'ordine naturale scuro-chiaro dei valori dell'immagine;
- essere invertibile (ciò servirà per una particolare applicazione dell'equalizzazione, il matching di istogramma, spiegato in seguito);
- “spostare” solo le barre esistenti dell'istogramma, senza modificarne l'altezza o crearne di nuove (nel discreto, sarà anche possibile che più barre si sovrappongano, sommandosi):¹ in termini matematici, se δx è la larghezza di una sezione dell'istogramma originale e δy è la larghezza della sezione corrispondente nell'istogramma risultante, deve valere la relazione

$$h_i(x) \delta x = h_o(y) \delta y$$

che, facendo il limite per $\delta x, \delta y \rightarrow 0$, diventa:

$$h_i(x) dx = h_o(y) dy$$

Siano N il numero totale di pixel e L il numero di livelli di grigio. Perché l'istogramma risultante sia uniforme, ciascuna barra deve avere altezza $\frac{N}{L}$, cioè deve valere la relazione:

$$h_o(y) dy = \frac{N}{L}$$

L'intervallo continuo $[0, L - 1]$ di valori di grigio dell'istogramma (ad esempio, $[0, 255]$), che ha larghezza $(L - 1) - 0 = L - 1$ (es. 255), viene diviso, nel discreto, in L barre (es. 256), quindi ciascuna di esse ha larghezza $\frac{L-1}{L}$ (es. $\frac{255}{256}$). Allora, si può “dare un valore” a dy (che in realtà, nel continuo, sarebbe infinitesimo), ponendo:

$$dy = \frac{L - 1}{L}$$

La relazione

$$h_o(y) dy = \frac{N}{L}$$

¹La caratteristica di spostare le barre dell'istogramma, eventualmente sovrapponendole, ma senza alteramenti modificarne l'altezza o eliminarle / crearne di nuove, è comune a tutti gli operatori che modificano il contrasto di un'immagine.

diventa quindi:

$$\begin{aligned}\frac{h_o(y)(L-1)}{L} &= \frac{N}{L} \\ h_o(y)(L-1) &= N \\ h_o(y) &= \frac{N}{L-1}\end{aligned}$$

In seguito:

$$\begin{aligned}h_i(x) dx = h_o(y) dy &\implies dy = \frac{h_i(x) dx}{h_o(y)} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{h_i(x)}{h_o(y)} \\ h_o(y) = \frac{N}{L-1} &\implies \frac{dy}{dx} = \frac{h_i(x)}{\frac{N}{L-1}} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{L-1}{N} h_i(x)\end{aligned}$$

Integrando, si ottiene poi y :

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{dx} dx &= \int \frac{L-1}{N} h_i(x) dx \\ y = f(x) &= \frac{L-1}{N} \int h_i(x) dx\end{aligned}$$

Nel discreto, l'integrazione diventa una sommatoria, corrispondente alla definizione dell'*istogramma cumulato* dell'immagine di partenza:

$$\int h_i(x) dx \longrightarrow \sum_{x=0}^{x_k} h_i(x) = H(x_k)$$

La trasformazione puntuale di equalizzazione dell'istogramma è quindi

$$y = f(x) = \frac{L-1}{N} H(x)$$

che assegna a ciascun pixel con livello di grigio x il valore di $H(x)$, moltiplicato per il fattore di scala $\frac{L-1}{N}$ (senza tale fattore, il valore di grigio risultante potrebbe uscire dal range di livelli di grigio).

5.2 Procedura

La procedura di equalizzazione è composta da tre passi:

1. si calcola l'istogramma h_i dell'immagine di input;
2. si calcola l'istogramma cumulato H_i ;
3. dato il valore x di ciascun pixel nell'immagine di input, si calcola il nuovo valore y del pixel nell'immagine di output, secondo la formula

$$y = \frac{L - 1}{N} H_i(x)$$

5.3 Caratteristiche

La particolarità dell'operatore di equalizzazione dell'istogramma è quella di essere completamente automatico: molti altri operatori di enhancement hanno dei parametri che l'utente deve impostare, spesso procedendo per tentativi.

L'equalizzazione, però, non dà sempre buoni risultati, soprattutto quando l'immagine è fortemente sbilanciata. Ad esempio, se ci sono ampie zone scure, queste diventano grigie, avvicinandosi ai valori dei pixel che invece erano già chiari, quindi si ottiene un peggioramento del contrasto.

Talvolta, il risultato dell'equalizzazione può essere migliorato calcolando la trasformazione in a una sola regione dell'immagine, la quale presenta già un istogramma più uniforme.

Un altro operatore che ha effetti simili all'equalizzazione è il *contrast stretching*. La differenza principale tra i due è che il contrast stretching ha solo l'obiettivo di far occupare alle barre dell'istogramma tutta la dinamica dei livelli di grigio, *senza* tentare di renderle uniformi. Di conseguenza, se le barre occupano già tutta la dinamica, ma in modo non uniforme, bisogna ricorrere all'equalizzazione. In altri casi, invece, sia il contrast stretching che l'equalizzazione danno buoni risultati.

6 Matching di istogramma

Il **matching di istogramma** è una procedura, basata sull'operatore di equalizzazione, che rende l'istogramma di un'immagine simile a quello di un'altra, oppure a una forma matematica predefinita (ad esempio, una gaussiana). Esso è utile, ad esempio, quando si hanno immagini acquisite in condizioni diverse che devono essere analizzate, oppure mosaiccate (posizionate l'una affianco all'altra).

Siano:

- $h_i(x)$ l'istogramma dell'immagine iniziale;
- $h_o(y)$ l'istogramma di riferimento;
- $z = f(x)$ la trasformazione che equalizza l'immagine iniziale, ottenendo, nel continuo, l'istogramma perfettamente uniforme $h^*(z)$, o, nel discreto, una sua approssimazione;
- $z = g(y)$ la trasformazione che equalizza l'immagine di riferimento, ottenendo, nel continuo, lo stesso istogramma uniforme $h^*(z)$, o, nel discreto, una sua approssimazione.

Siccome (nel continuo, e a parità di costanti N e L), l'istogramma equalizzato $h^*(z)$ delle due immagini è uguale, si può ricavare una trasformazione da x a y , componendo la funzione di equalizzazione f dell'immagine originale con l'*inversa* della funzione di equalizzazione g dell'immagine di riferimento:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = z = g(y) \\ y = g^{-1}(z) \end{array} \right\} \implies y = g^{-1}(f(x))$$