Azzolini Riccardo 2019-03-06

Limiti di funzioni

1 Proprietà verificate definitivamente

Sia $f : D \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$ di accumulazione per D. Si dice che $f(x)$ verifica una certa proprietà **definitivamente per** $x \to x_0$ se $\exists U(x_0)$ intorno di x_0 tale che $\forall x \in (U(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap D$ la funzione verifica la proprietà.

2 Teorema del confronto

Teorema: Siano $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$ di accumulazione per D. Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ definitivamente per $x \to x_0$ e se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l \in \mathbb{R}^*$$

allora

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l$$

Dimostrazione: Siccome $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ definitivamente per $x \to x_0$, $\exists U_0(x_0)$ intorno di x_0 tale che

$$\forall x \in (U_0(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap D \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

- Sia $l \in \mathbb{R}$. Per la definizione di limite:
  - $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists U_1(x_0)$ tale che

    $$\forall x \in (U_1(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap D \quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

  - $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists U_2(x_0)$ tale che

    $$\forall x \in (U_2(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap D \quad l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$$

Sia $U(x_0) = U_0(x_0) \cap U_1(x_0) \cap U_2(x_0)$, che è ancora un intorno di x_0, tale che

$$\forall x \in (U(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap D \quad \underbrace{l - \varepsilon <}_{} f(x) \le \underbrace{g(x)}_{} \le h(x) \underbrace{< l + \varepsilon}_{}$$

Di conseguenza,

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l$$

- Sia invece $l = +\infty$. Allora, $\forall a \quad \exists U_1(x_0)$ tale che

$$\forall x \in (U_1(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap D \quad f(x) > a$$

e quindi, $\forall x \in (U_0(x_0) \cap U_1(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap D$,

$$\underbrace{g(x)}_{} \ge f(x) \underbrace{> a}_{} \implies \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty = l$$

- La dimostrazione per il caso $l = -\infty$ è analoga. $\square$

2.1 Esempio

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x}$$

$-1 \le \sin x \le 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, quindi se $x > 0$ si ha

$$-\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$$

e allora

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0 \\ &\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{aligned}\right\} \implies \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

In generale, il teorema del confronto si può applicare per qualsiasi funzione costituita da una funzione limitata fratto una che tende a $\pm\infty$.

3 Calcolo di limiti con 0 e $\pm\infty$

Teorema: Siano $f, g : D \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$ di accumulazione per D.

- Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty\ (-\infty)$ e g è definitivamente limitata inferiormente (superiormente), allora

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty\ (-\infty)$$

- Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty\ (-\infty)$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = l \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$, allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } l > 0\ (l < 0) \\ -\infty & \text{se } l < 0\ (l > 0) \end{cases}$$

  (in pratica, il segno dell'infinito segue la regola del segno del prodotto).

- Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ e $g(x)$ è definitivamente limitata, allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$$

- Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^+\ (0^-)$, cioè $f(x)$ tende a 0 assumendo valori positivi (negativi), allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty\ (-\infty)$$

- Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty\ (-\infty)$, allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0^+\ (0^-)$$

3.1 Esempi

$$\lim_{x\to+\infty} (x - \sin x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4 + x^2} = +\infty$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^4 - x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3(x-1)} = -\infty \\ &\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3(x-1)} = +\infty \end{aligned}\right\} \implies \nexists \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4 - x^3}$$

4 Forme indeterminate

Le **forme indeterminate** (o **forme di indecisione**) sono

- $+\infty + (-\infty)$
- $\dfrac{\infty}{\infty}$
- $\dfrac{0}{0}$
- $0 \cdot \infty$
- ∞^0
- 0^0
- 1^∞

dove 0 e 1 *non sono costanti*, ma indicano funzioni che tendono rispettivamente a 0 e 1.

In questi casi, il limite non si può stabilire a priori: il calcolo due limiti con la stessa forma indeterminata può portare a risultati diversi.

4.1 Esempi

4.1.1 Forma indeterminata $\dfrac{\infty}{\infty}$: quozienti di polinomi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x-1}{2x^2+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1+\overbrace{\frac{2}{x}}^{0}-\overbrace{\frac{1}{x^2}}^{0}\right)}{\cancel{x^2}\left(2+\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\cancel{3}}\left(1+\overbrace{\frac{2}{x^2}}^{0}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0}\right)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x^2+3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\left(1+\overbrace{2x}^{0}\right)}{x^{\cancel{2}}\left(1+\underbrace{3x}_{0}\right)} = 0$$

In pratica, per questa forma indeterminata, quando la funzione è un quoziente di polinomi:

- se numeratore e denominatore hanno lo stesso grado, il limite è il rapporto tra i coefficienti delle potenze di grado *massimo*;
- se il numeratore ha grado superiore al denominatore, il limite è ∞;
- se il numeratore ha grado inferiore al denominatore, il limite è 0.

4.1.2 Forma indeterminata $\frac{0}{0}$: quozienti di polinomi

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - x}{3x^2 + x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(\overbrace{2x-1}^{-1})}{\cancel{x}(\underbrace{3x+1}_{1})} = -1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^4 + 2x}{2x^3 + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(\overbrace{3x^3+2}^{2})}{x^{\cancel{2}}(\underbrace{2x+1}_{1})} \quad \nexists \text{ (limite destro e sinistro diversi: } \pm\infty)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^4 + 2x^2}{5x^3 + x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\cancel{2}}(\overbrace{3x^2+2}^{2})}{\cancel{x}(\underbrace{5x^2+1}_{1})} = 0$$

In pratica, si considerano i gradi *minimi* delle potenze:

- se numeratore e denominatore hanno la stessa potenza di grado minimo, il limite è il rapporto tra i coefficienti di tale potenza;
- se il numeratore ha una potenza di grado minimo superiore a quella del denominatore, il limite è 0;
- se il numeratore ha una potenza di grado minimo inferiore a quella del denominatore, il limite può essere ∞ o non esistere, a seconda dei gradi.

4.1.3 Forma indeterminata $+\infty - \infty$: differenza di radici

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

5 Crescita degli infiniti: potenze, esponenziali e logaritmi

Siano $a > 1$ e $\alpha > 0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$$

perché l'esponenziale cresce più rapidamente di qualsiasi potenza.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0$$

perché il logaritmo cresce più lentamente di x^α. Anche le potenze del logaritmo crescono più lentamente di x^α:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log_a x)^\beta}{x^\alpha} = 0 \quad \forall\beta > 0$$

5.1 Esempi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+x}{x^4+2x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\left(1+\overbrace{\frac{x}{2^x}}^{0}\right)}{x^4\left(1+\underbrace{\frac{2}{x^2}}_{0}\right)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} x2^{\frac{1}{x}} \quad \text{forma indeterminata } 0\cdot\infty$$

Sostituzione: $t = \dfrac{1}{x} \implies x = \dfrac{1}{t}$; se $x \to 0^+$, $t \to +\infty$.

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}2^t = \lim_{t\to+\infty} \frac{2^t}{t} = +\infty$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{5^x - 2^x}{3^x + 4^x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{5^x\left(1 - \dfrac{2^x}{5^x}\right)}{4^x\left(\dfrac{3^x}{4^x} + 1\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \overbrace{\left(\frac{5}{4}\right)^x}^{+\infty} \frac{1 - \overbrace{\left(\dfrac{2}{5}\right)^x}^{0}}{\underbrace{\left(\dfrac{3}{4}\right)^x}_{0} + 1} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$