Azzolini Riccardo 2020-03-12

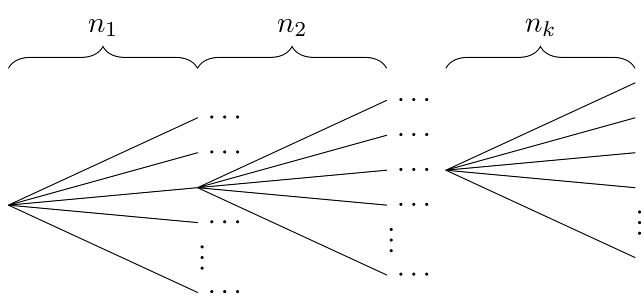
Calcolo combinatorio

1 Cardinalità del prodotto cartesiano

Teorema: Se gli insiemi $A_1, A_2, \dots, A_k$ contengono rispettivamente $n_1, n_2, \dots, n_k$ oggetti, il numero di modi diversi di scegliere prima un oggetto di A_1, poi un oggetto di A_2, e così via, fino a un oggetto di A_k, cioè la cardinalità del prodotto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$, è

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$$

Ciò può essere dimostrato, a livello intuitivo, rappresentando le possibili scelte sotto forma di albero,



nel quale la i-esima diramazione rappresenta la scelta di un elemento di A_i, e perciò ha n_i rami. Ciascuna delle foglie corrisponde allora a un modo di scegliere un elemento da ogni insieme $A_1, A_2, \dots, A_k$, e in totale ci sono appunto $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k = N$ foglie.

2 Disposizioni semplici

Teorema: Il numero delle **disposizioni semplici** (cioè *senza ripetizione*) di k oggetti scelti da un insieme di n oggetti distinti è dato da

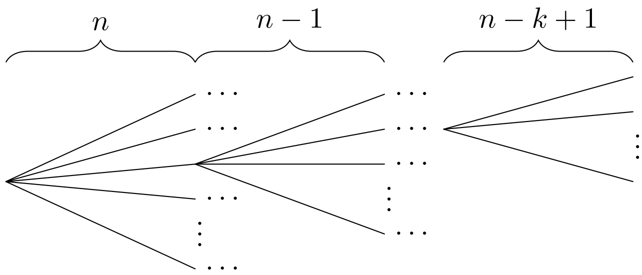
$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Nota: Come caso particolare, se $k = n$, si dice che

$$D_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{1} = n!$$

è il numero di **permutazioni** di n oggetti.

Anche questo teorema può essere dimostrato intuitivamente mediante un albero:



Ogni volta che si sceglie un elemento dell'insieme, cioè a ogni diramazione, questo viene escluso dalle scelte successive, quindi la prossima diramazione avrà un ramo in meno. Allora,

1. alla prima diramazione si hanno n scelte,
2. alla seconda se ne hanno $n-1$,
3. alla terza se ne hanno $n-2$,

e così via, fino alla k-esima diramazione, per la quale si hanno $n-k+1$ scelte. Quindi, applicando il teorema precedente, il numero totale di possibili scelte è

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

che può essere scritto anche come

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\cdots 1}{(n-k)(n-k-1)\cdots 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

3 Combinazioni

Teorema: Il numero delle **combinazioni** di n oggetti a gruppi di k è dato da

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Dimostrazione: Sia A un insieme di cardinalità n, cioè i cui elementi possono semplicemente essere indicati con i numeri da 1 a n:

$$A = \{1, 2, \ldots, n\}$$

Da esso, si ricava l'insieme B delle n-uple contenenti tutti i suoi elementi:

$$B = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \mid \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \in B,\ \omega_i \neq \omega_j\ \forall i \neq j\}$$

In pratica, B è l'insieme delle permutazioni di A, e quindi ha cardinalità:

$$\#\, B = D_{n,n} = n!$$

Al fine di questa dimostrazione, sarà necessario individuare una corrispondenza tra gli elementi di B e i sottoinsiemi di cardinalità k dell'insieme A. Ciò si può fare "dividendo" le n-uple in due parti, tali che

1. i primi k elementi sono quelli "scelti" per formare il sottoinsieme,
2. i restanti $n - k$ (quelli con indici da $k + 1$ a n) sono tutti gli elementi che invece non vengono inclusi,

e trascurando l'ordine degli elementi all'interno di ciascuna delle due parti. A livello formale, queste operazioni vengono eseguite mediante l'introduzione di due relazioni di equivalenza.

La prima relazione di equivalenza, $\sim_1$, costruita sull'insieme B, considera due n-uple come equivalenti se e solo se la "seconda parte" di entrambe contiene gli stessi elementi, a prescindere dall'ordine. In simboli, dati due elementi $b_1, b_2 \in B$, si ha che:

$$b_1 \sim_1 b_2 \iff \{\omega_{k+1}, \dots, \omega_n\}_{b_1} = \{\omega_{k+1}, \dots, \omega_n\}_{b_2}$$

(dove la notazione $\{\omega_i, \dots, \omega_j\}_b$ indica, appunto, gli elementi dall'i-esimo al j-esimo della n-upla b, considerati senza tenere conto del loro ordine).

Per definizione, gli elementi di una classe di equivalenza di $\sim_1$ corrispondono alle permutazioni dell'insieme $\{\omega_{k+1}, \dots, \omega_n\}$, che ha cardinalità $n - k$, perciò la cardinalità di ciascuna classe di equivalenza è:

$$D_{n-k,n-k} = (n - k)!$$

Allora, essendoci $\#\, B = n!$ elementi in totale, e $(n - k)!$ elementi per ogni classe di equivalenza, il numero di classi deve essere:

$$\frac{n!}{(n - k)!}$$

Questa è quindi la cardinalità dell'insieme quoziente $B/{\sim_1}$, che è appunto l'insieme di tutte le classi di equivalenza.

A questo punto, considerando gli elementi rappresentativi delle classi,[1] si introduce su $B/{\sim_1}$ la seconda relazione di equivalenza, $\sim_2$: essa pone come equivalenti le n-uple che

[1] Assegnare gli elementi rappresentativi alle classi di equivalenza significa definire una corrispondenza biunivoca tra tali elementi e le classi. In questo caso, si può ad esempio scegliere, per ciascuna classe, una qualsiasi delle n-uple che vi appartengono.

hanno gli stessi elementi, a prescindere dall'ordine, nella "prima parte". Formalmente, se $b_1, b_2 \in B/{\sim_1}$, allora:

$$b_1 \sim_2 b_2 \iff \{\omega_1, \dots, \omega_k\}_{b_1} = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}_{b_2}$$

Analogamente a quanto fatto per $\sim_1$, si mettono in corrispondenza gli elementi di ciascuna classe di equivalenza di $\sim_2$ con le permutazioni dell'insieme $\{\omega_1, \dots, \omega_k\}$, che sono $D_{k,k} = k!$, determinando così che la cardinalità del quoziente di $\sim_2$ è:

$$\#((B/{\sim_1})/{\sim_2}) = \frac{\#(B/{\sim_1})}{k!} = \frac{\dfrac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Infine, siccome le due relazioni di equivalenza "eliminano" l'ordine sia dei primi k elementi delle n-uple che degli $n-k$ rimanenti, le n-uple rappresentative delle classi di $\sim_2$ possono essere messe in corrispondenza biunivoca con i sottoinsiemi di cardinalità k dell'insieme A:

$$\#\,A = \#((B/{\sim_1})/{\sim_2}) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \qquad \square$$

4 Combinazioni con ripetizione

Teorema: Il numero delle **combinazioni con ripetizione** di n oggetti a gruppi di k è dato da

$$C_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{D_{n+k-1,k}}{k!} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}$$

Dimostrazione: Per prima cosa, si osserva che scegliere k oggetti da un insieme di n (in altre parole, scegliere k oggetti tra oggetti di n tipi) potendo ripetere le scelte equivale a costruire una sequenza di k oggetti (rappresentati graficamente come asterischi),

$$\underbrace{*\,*\,*\,\cdots\,*}_{k \text{ oggetti}}$$

nella quale l'appartenenza degli oggetti agli n tipi disponibili è indicata mediante l'aggiunta di appositi elementi separatori,

$$|\,|\,|\,\cdots\,|$$

Ad esempio, se si vogliono scegliere 5 oggetti da un insieme di 4, una delle possibili sequenze costruite in questo modo è

$$*\,*\,|\,*\,|\,|\,*\,*$$

che rappresenta la scelta di:

- 2 oggetti del primo tipo;
- 1 oggetto del secondo tipo;
- nessun oggetto del terzo tipo;
- 2 oggetti del quarto tipo.

Per separare n tipi di oggetti servono $n-1$ separatori (uno dopo ogni tipo, tranne l'ultimo, che non ha un tipo successivo da cui deve essere separato). Quindi, le sequenze considerate sono formate complessivamente da $k+n-1$ elementi, dei quali, appunto, k sono oggetti e $n-1$ sono separatori. Allora, tutte queste sequenze possono essere enumerate ottenendo prima le permutazioni dei $k+n-1$ elementi, che sono $(k+n-1)!$, e poi trascurando, all'interno di esse, i diversi ordini

- dei k oggetti: $k!$;
- degli $n-1$ separatori: $(n-1)!$.

Infatti, data una qualsiasi di queste sequenze, scambiando tra di loro alcuni "asterischi" (oggetti) si ottiene una sequenza indistinguibile a quella di partenza, e lo stesso avviene se si scambiano alcuni separatori (l'unica operazione che invece produce una sequenza diversa è lo scambio di posizione tra un asterisco e un separatore).

Si ricava così che ci sono in totale

$$\frac{(k+n-1)!}{k!\,(n-1)!} = \frac{(n+k-1)!}{((n+k-1)-k)!\,k!} = \binom{n+k-1}{k} = C_{n+k-1,k}$$

modi per scegliere k oggetti da un insieme di n. $\square$

5 Problemi d'esempio

5.1 Numeri di 4 cifre

Problema: Trovare quanti numeri di 4 cifre possono essere formati con le 10 cifre $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$, se

1. si ammettono ripetizioni;
2. *non* si ammettono ripetizioni;
3. l'ultima cifra deve essere 0 e non si ammettono ripetizioni.

Soluzioni:

1. Un primo tentativo potrebbe essere

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$$

ma ciò conta anche i numeri che iniziano con 0 (ad esempio 0397), e non possono quindi essere considerati "veramente" di 4 cifre. Bisogna invece escludere, per la prima cifra, la scelta dello 0, lasciando solo 9 scelte disponibili. Poi, nelle cifre successive, lo 0 è ammesso, poiché un numero come ad esempio 1000 è comunque di 4 cifre. Allora, la soluzione corretta è:

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^3 = 9000$$

2. Anche in questo caso, la prima cifra deve essere scelta tra $\{1, 2, \dots, 9\}$, cioè tra 9 opzioni. Per la seconda cifra, invece, viene esclusa dalle opzioni quella scelta come prima cifra (al fine di evitare le ripetizioni), ma in compenso è ammesso lo 0, quindi il numero di opzioni è ancora 9. Le ultime due cifre, invece, vengono scelte rispettivamente tra 8 e 7 opzioni, sempre per evitare le ripetizioni.

   In sintesi, una volta scelta la prima cifra, il numero di modi per scegliere le restanti 3 è dato dalle disposizioni semplici $D_{9,3} = 9 \cdot 8 \cdot 7$. Di conseguenza, ci sono complessivamente

$$9 \cdot D_{9,3} = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$$

   numeri di 4 cifre non ripetute.

3. Non essendo ammesse le ripetizioni, fissare l'ultima cifra a 0 esclude automaticamente tale opzione dalla scelta della prima cifra, eliminando già la possibilità di ottenere un numero "troppo corto". Allora, le prime tre cifre possono essere scelte (dall'insieme $\{1, 2, \dots, 9\}$) in

$$D_{9,3} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$$

   modi.

5.2 Libri su uno scaffale

Problema: Si sistemano su uno scaffale 4 libri di matematica, 6 di fisica e 2 di chimica. Contare quante sistemazioni sono possibili se

1. i libri di ciascuna materia devono stare insieme;
2. solo i libri di matematica devono stare insieme.

Soluzioni:

1. Innanzitutto, si sceglie l'ordine delle materie sullo scaffale, ottenendo 3! possibili permutazioni. Poi, per ciascuna di esse, si considerano le permutazioni dei libri all'interno del "blocco" di ogni materia, che sono:

- $4!$ per matematica;
- $6!$ per fisica;
- $2!$ per chimica.

Allora, complessivamente, il numero di sistemazioni possibili è:

$$3!\,4!\,6!\,2! = 207360$$

2. Inizialmente, si considerano i libri di matematica come un blocco unico, e si determinano tutte le sistemazioni di tale blocco insieme agli altri $6 + 2 = 8$ libri, ovvero tutte le permutazioni di 9 elementi, che sono $9!$. Rimangono poi da calcolare le permutazioni dei libri di matematica, che, come già visto, sono $4!$. In questo caso, il numero di sistemazioni possibili è quindi:

$$9!\,4! = 8709120$$

Lo stesso risultato può essere ottenuto con un ragionamento leggermente diverso. Per prima cosa, si sceglie la posizione del blocco di matematica rispetto agli altri libri: ciò può essere fatto in 9 modi diversi (prima di ciascuno degli altri 8 libri, oppure per ultimo). Successivamente, si ricava il numero di permutazioni

- dei libri di matematica: $4!$;
- degli altri libri (situati "intorno" a quelli di matematica): $8!$.

La soluzione ottenuta è perciò

$$9 \cdot 8!\,4! = 9!\,4! = 8709120$$

che è uguale, appunto, a quella ottenuta con il metodo precedente.

5.3 Palline colorate in fila

Problema: 5 palline rosse, 2 bianche e 3 azzurre devono essere sistemate in fila. Se tutte le palline dello stesso colore sono indistinguibili, quante sistemazioni sono possibili?

Le permutazioni di tutte le palline sono $(5+2+3)! = 10!$. Tra queste, sono indistinguibili quelle in cui cambia solo l'ordine di palline degli stessi colori: siccome esistono

- $5!$ permutazioni delle palline rosse,
- $2!$ permutazioni delle palline bianche,
- $3!$ permutazioni delle palline azzurre,

il numero di sistemazioni distinte è:

$$\frac{10!}{5!\,2!\,3!} = 2520$$

5.4 Raggruppamento di 10 oggetti

Problema: Quanti sono i modo di dividere 10 oggetti in due gruppi, rispettivamente di 4 e 6 oggetti?

Se A è l'insieme dei 10 oggetti, ciascun raggruppamento di questo tipo può essere rappresentato da una coppia di insiemi (G_4, G_6), tali che

$$\begin{gathered} G_4, G_6 \subset A \\ \# G_4 = 4 \\ \# G_6 = 6 \end{gathered}$$

Siccome uno stesso oggetto non può appartenere a entrambi i gruppi ($G_4 \cap G_6 = \varnothing$), e i due gruppi contengono complessivamente tutti gli oggetti ($G_4 \cup G_6 = A$), una volta scelti gli oggetti di un gruppo, quelli che compongono l'altro gruppo sono per forza tutti i rimanenti: ad esempio, se si scelgono gli oggetti da inserire in G_4, il gruppo G_6 può essere formato solo dai 6 oggetti rimasti. Perciò, il numero modi di formare questi due gruppi è uguale al numero di modi di costruire solo il gruppo da 4 (o, equivalentemente, quello da 6[2]), cioè:

$$C_{10,4} = \binom{10}{4} = \frac{10!}{6!\,4!} = 210$$

5.5 Parole di 5 lettere

Problema: Quante parole (anche senza significato) di 3 diverse consonanti e 2 diverse vocali si possono formare con l'alfabeto di 21 lettere (16 consonanti e 5 vocali)?

Per prima cosa, si scelgono le lettere da usare per formare la parola: ci sono

- $C_{16,3}$ modi di scegliere le consonanti;
- $C_{5,2}$ modi di scegliere le vocali.

Poi, si stabilisce l'ordine delle lettere scelte nella parola, che significa considerare le $(3+2)! = 5!$ permutazioni (tutte distinguibili, in quanto non ci sono lettere ripetute). Allora, il numero di parole che si possono formare è:

$$\binom{16}{3}\binom{5}{2} \cdot 5! = \frac{16!}{13!\,3!} \cdot \frac{5!}{3!\,2!} \cdot 5! = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{3!} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2!} \cdot 5! = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 672000$$

[2] In generale, per le combinazioni, vale la proprietà $C_{n,k} = C_{n,n-k}$, (in questo caso, $C_{10,4} = C_{10,10-4} = C_{10,6}$), perché determinare quali k elementi (dell'insieme di n) includere in un sottoinsieme è equivalente a determinare quali siano gli $n-k$ da escludere.