Azzolini Riccardo 2019-05-06

Integrazione per sostituzione e di funzioni razionali

1 Integrazione per sostituzione

Siano

- $f \in C([a, b])$;
- $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ derivabile in $[c, d]$ e tale che $\exists \alpha, \beta \in [c, d]$ tali che $\varphi(\alpha) = a$ e $\varphi(\beta) = b$;
- F una primitiva di f.

$$\begin{aligned}
(F(\varphi(x)))' &= F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x) \\
\int_\alpha^\beta (F(\varphi(x)))' \,\mathrm{d}x &= \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x) \,\mathrm{d}x \\
[F(\varphi(x))]_\alpha^\beta &= \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x) \,\mathrm{d}x \\
F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) &= \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x) \,\mathrm{d}x \\
F(b) - F(a) &= \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x) \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Se si pone $t = \varphi(x)$, allora $\mathrm{d}t = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$: *informalmente*, si può scrivere

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \varphi'(x) \implies \mathrm{d}t = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

Si ottiene quindi

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a=\varphi(\alpha)}^{b=\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)}$$

che è la regola di **integrazione per sostituzione**.

1.1 Esempi

$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{1+x^2}\cdot 2x\,\mathrm{d}x && t = 1+x^2 \implies \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x\\ &= \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\\ &= \log|t| + c\\ &= \log|1+x^2| + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\cos x\,\mathrm{d}x &= \int t^2\,\mathrm{d}t && t = \sin x \implies \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{t^3}{3} + c\\ &= \frac{\sin^3 x}{3} + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 \frac{e^x}{1+(e^x)^2}\,\mathrm{d}x && t = e^x \implies \begin{cases}\mathrm{d}t = e^x\,\mathrm{d}x\\ x = 1 \implies t = e\\ x = 2 \implies t = e^2\end{cases}\\ &= \int_e^{e^2} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= [\operatorname{arctg} t]_e^{e^2}\\ &= \operatorname{arctg} e^2 - \operatorname{arctg} e\end{aligned}$$

Osservazione: Invece di sostituire gli estremi dell'intervallo, si potrebbe riscrivere la primitiva in funzione di x,

$$\operatorname{arctg} t = \operatorname{arctg} e^x$$

e poi eseguire il calcolo con gli estremi originali:

$$[\operatorname{arctg} e^x]_1^2 = \operatorname{arctg} e^2 - \operatorname{arctg} e$$

$$
\begin{aligned}
\int \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x &= \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{g} \, \mathrm{d}x \\
&= x \operatorname{arctg} x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x \\
&= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x \qquad\qquad t = 1 + x^2 \implies \mathrm{d}t = 2x \, \mathrm{d}x \\
&= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t \\
&= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log|t| + c \\
&= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log(1 + x^2) + c
\end{aligned}
$$

$$
\int \cos\left(\log x^2\right) \, \mathrm{d}x \qquad
\begin{aligned}
& t = \log x^2 = 2 \log x \implies \frac{t}{2} = \log x \implies x = e^{\frac{t}{2}} \\
& \mathrm{d}t = \frac{2}{x} \, \mathrm{d}x \implies \mathrm{d}x = \frac{x}{2} \, \mathrm{d}t = \frac{e^{\frac{t}{2}}}{2} \, \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \cos t \cdot \frac{e^{\frac{t}{2}}}{2} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \int \underbrace{\cos t}_{f'} \cdot \underbrace{e^{\frac{t}{2}}}_{g} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \left[\sin t \cdot e^{\frac{t}{2}} - \int \sin t \cdot \frac{e^{\frac{t}{2}}}{2} \, \mathrm{d}t \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\sin t \cdot e^{\frac{t}{2}} - \frac{1}{2} \int \underbrace{\sin t}_{f'} \cdot \underbrace{e^{\frac{t}{2}}}_{g} \, \mathrm{d}t \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\sin t \cdot e^{\frac{t}{2}} - \frac{1}{2} \left(-\cos t \cdot e^{\frac{t}{2}} + \int \cos t \cdot \frac{e^{\frac{t}{2}}}{2} \, \mathrm{d}t \right) \right]
\end{aligned}
$$

$$
\implies \int \cos t \cdot \frac{e^{\frac{t}{2}}}{2} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \sin t \cdot e^{\frac{t}{2}} + \frac{1}{4} \cos t \cdot e^{\frac{t}{2}} - \frac{1}{4} \int \cos t \cdot \frac{e^{\frac{t}{2}}}{2} \, \mathrm{d}t
$$

$$
\implies \frac{5}{4} \int \cos t \cdot \frac{e^{\frac{t}{2}}}{2} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{4} e^{\frac{t}{2}} (2 \sin t + \cos t)
$$

$$
\implies \int \cos t \cdot \frac{e^{\frac{t}{2}}}{2} \, \mathrm{d}t = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} e^{\frac{t}{2}} (2 \sin t + \cos t) + c
$$

$$
\begin{aligned}
\implies \int \cos\left(\log x^2\right) \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{5} e^{\frac{2 \log x}{2}} (2 \sin(2 \log x) + \cos(2 \log x)) + c \\
&= \frac{x}{5} \left(2 \sin\left(\log x^2\right) + \cos\left(\log x^2\right) \right) + c
\end{aligned}
$$

2 Integrazione di funzioni razionali

Per integrare una funzione razionale, si controlla innanzitutto se al numeratore è presente, o si può "far comparire", la derivata del denominatore. In tal caso, l'integrazione si esegue per sostituzione. Altrimenti, è necessario applicare tecniche diverse in base al tipo di funzione razionale.

3 Numeratore 1 e denominatore di 2° grado

La tecnica da utilizzare in questi casi dipende dal Δ del denominatore.

3.1 Denominatore con $\Delta < 0$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x \qquad \Delta = 4 - 16 < 0$$

L'obiettivo è ricondursi a un integrale del tipo

$$\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

A tale scopo, si fa il *completamento del quadrato*: si aggiunge e si sottrae una costante al denominatore per poter considerare i termini contenenti la x come il quadrato di un binomio.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\underbrace{x^2+2x}+4} &= \frac{1}{\underbrace{x^2+2x+1}-1+4} \\
&= \frac{1}{(x+1)^2+3} \\
&= \frac{1}{3\left[\dfrac{(x+1)^2}{3}+1\right]} \\
&= \frac{1}{3\left[\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]}
\end{aligned}$$

Diventa così possibile effettuare la sostituzione

$$t = \frac{x+1}{\sqrt{3}} \implies \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x \implies \mathrm{d}x = \sqrt{3}\,\mathrm{d}t$$

e calcolare l'integrale:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{3\left[\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\int \frac{\sqrt{3}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg} t + c \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + c
\end{aligned}$$

3.2 Denominatore con $\Delta > 0$

$$\begin{gathered}
\int \frac{1}{x^2 - x - 6} \\
\Delta = 1 + 24 = 25 > 0 \\
x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} \implies \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \end{cases} \\
\frac{1}{x^2 - x - 6} = \frac{1}{(x-3)(x+2)}
\end{gathered}$$

Si vogliono trovare due costanti A e B tali che

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} \\
\iff &\frac{1}{(x-3)(x+2)} = \frac{Ax + 2A + Bx - 3B}{(x-3)(x+2)} \\
\iff &\frac{1}{(x-3)(x+2)} = \frac{(A+B)x + 2A - 3B}{(x-3)(x+2)}
\end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi, i due numeratori, e quindi le due frazioni, sono uguali se e solo se i termini dello stesso grado nei due polinomi hanno coefficienti uguali. È allora necessario porre:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A-3B=1 \end{cases} \implies \begin{cases} B=-A \\ 2A+3A=1 \end{cases} \implies \begin{cases} B=-\dfrac{1}{5} \\ A=\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Si può così "spezzare" l'integrale in più integrali immediati:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x-3)(x-5)}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{5}\int \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{5}\int \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{5}\log|x-3| - \frac{1}{5}\log|x+2| + c \\ &= \frac{1}{5}\log\left|\frac{x-3}{x+2}\right| + c \end{aligned}$$

3.3 Denominatore con $\Delta = 0$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+8x+16}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{(x+4)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int (x+4)^{-2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{(x+4)^{-1}}{-1} + c \\ &= -\frac{1}{x+4} + c \end{aligned}$$

$$\Delta = 64 - 64 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-8}{2} = -4$$