Azzolini Riccardo 2020-10-14

Automi a stati finiti non deterministici

1 Definizione formale

Un **automa a stati finiti non deterministico** (**NFA**, *Nondeterministic Finite Automaton*) è una quintupla $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ in cui:

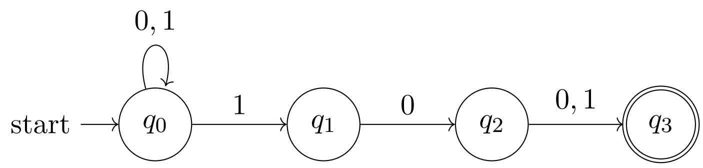
- Q è l'insieme finito e non vuoto degli stati;
- Σ è l'alfabeto di input;
- $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$ è la funzione di transizione;
- $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale;
- $F \subseteq Q$ è l'insieme degli stati finali.

Si osserva che questi elementi sono uguali a quelli che caratterizzano un DFA: l'unica differenza è la funzione di transizione, che associa a ogni coppia stato-simbolo non un singolo stato, bensì un sottoinsieme di stati.

Notazione: Si scrive $p \xrightarrow{a} r$ per indicare che $r \in \delta(p, a)$ (per un DFA, la stessa notazione indicava che $\delta(p, a) = r$, ma per un NFA $\delta(p, a)$ è un insieme $S \subseteq Q$, non un singolo stato r).

1.1 Esempio

Riprendendo il diagramma di transizione usato per introdurre in modo informale gli NFA,



formalmente esso rappresenta un NFA $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ con:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$;
- $\Sigma = \{0, 1\}$;

- funzione di transizione $\delta : \{q_0, q_1, q_2, q_3\} \times \{0, 1\} \to 2^{\{q_0,q_1,q_2,q_3\}}$;
- stato iniziale q_0;
- $F = \{q_3\}$;

La rappresentazione tabellare di questo automa è:

δ	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\varnothing$
q_2	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$
$*q_3$	$\varnothing$	$\varnothing$

In questa tabella, l'insieme riportato per una certa combinazione di stato q e simbolo a — cioè il valore di $\delta(q, a)$ — è l'insieme degli stati in cui l'automa può arrivare a partire dallo stato q seguendo transizioni etichettate con il simbolo a.

2 Computazioni di un NFA su una stringa

Dato un NFA $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$, in cui $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$, si definisce la **funzione di transizione estesa** $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to 2^Q$ di A, per induzione sulla lunghezza della stringa $w \in \Sigma^*$ (in modo simile a quanto fatto per i DFA):

- *Base*: quando $|w| = 0$, cioè $w = \epsilon$, si pone $\hat{\delta}(q, \epsilon) = \{q\}$ (l'automa non cambia stato).
- *Passo induttivo*: se $|w| > 0$, allora la stringa può essere scomposta in $w = xa$, con $x \in \Sigma^*$ e $a = \Sigma$, e si definisce

  $$\hat{\delta}(q, xa) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q,x)} \delta(p, a)$$

  (si considerano tutti gli stati in cui l'automa arriva leggendo il prefisso x, raccogliendo per ciascuno di essi gli stati in cui si arriva leggendo poi il simbolo a).

In pratica, la funzione di transizione estesa $\hat{\delta}(q, w)$ descrive l'insieme degli stati in cui si trova l'automa dopo essere partito da uno stato q e aver letto l'intera stringa w.

3 Stringhe e linguaggi accettati da un NFA

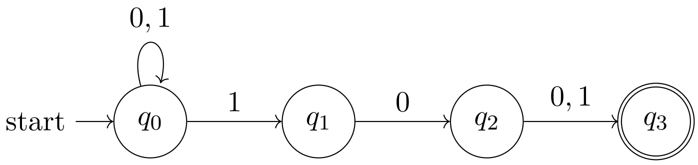
Sia $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ un NFA.

- A **accetta** una stringa w se e solo se $\hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \varnothing$ (cioè se almeno uno degli stati raggiunti da q_0 seguendo la stringa w è uno stato finale).
- Il **linguaggio riconoscuito** da A è

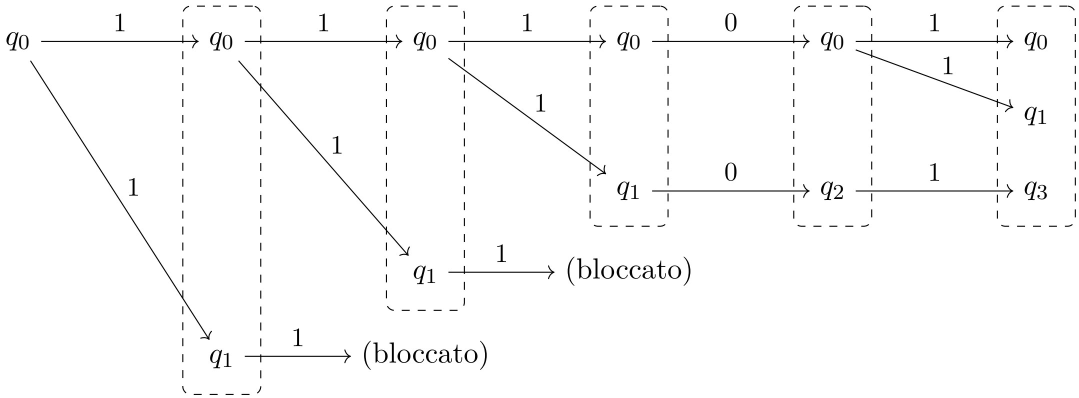
$$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid A \text{ accetta } w\} = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \varnothing\}$$

4 Esempio di computazione

Considerando ancora l'automa



si è già visto che sulla stringa 11101 si sviluppa il seguente albero di computazione:



Per studiare formalmente le computazioni sulla stessa stringa, bisogna calcolare il valore di $\hat{\delta}(q_0, 11101)$. Come nel caso deterministico, piuttosto che seguire alla lettera la definizione induttiva di $\hat{\delta}$, conviene operare sui prefissi della stringa, nell'ordine dal più corto

(ϵ) alla stringa intera:

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}(q_0, \epsilon) &= \{q_0\} \\
\hat{\delta}(q_0, 1) &= \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q_0, \epsilon)} \delta(p, 1) = \delta(q_0, 1) = \{q_0, q_1\} \\
\hat{\delta}(q_0, 11) &= \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q_0, 1)} \delta(p, 1) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0, q_1\} \cup \varnothing = \{q_0, q_1\} \\
\hat{\delta}(q_0, 111) &= \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q_0, 11)} \delta(p, 1) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0, q_1\} \\
\hat{\delta}(q_0, 1110) &= \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q_0, 111)} \delta(p, 0) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_1, 0) = \{q_0, q_2\} \\
\hat{\delta}(q_0, 11101) &= \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_2, 1) = \{q_0, q_1, q_3\}
\end{aligned}$$

Si osserva che i passaggi di calcolo della funzione di transizione estesa corrispondono ai *livelli* dell'albero di computazione (nella figura sopra, ciascun livello è indicato con un riquadro tratteggiato).

Siccome $\hat{\delta}(q_0, 11101) \cap F = \{q_0, q_1, q_3\} \cap \{q_3\} = \{q_3\} \neq \varnothing$, la stringa 11101 è *accettata* dall'automa (come si era già concluso osservando che nell'albero di computazione è presente almeno un percorso che porta a uno stato finale).