Azzolini Riccardo 2020-10-20

Equivalenza tra DFA e NFA

1 Il problema dell'equivalenza

L'equivalenza tra modelli computazionali viene studiata sulla classe di linguaggi riconosciuti: due modelli sono equivalenti se e solo se riconoscono la stessa classe di linguaggi, ovvero se e solo se *ogni* linguaggio riconosciuto da uno dei due modelli può essere riconosciuto anche dall'altro modello.

È importante sottolineare che l'equivalenza è appunto su *tutti* i linguaggi riconosciuti dai due modelli: per dimostrarla, non è sufficiente mostrare che esiste *uno specifico* linguaggio riconosciuto da entrambi.

2 Equivalenza tra DFA e NFA

Si vuole dimostrare che i DFA e gli NFA riconoscono la stessa classe di linguaggi, cioè che la classe dei linguaggi regolari (per definizione, quelli riconosciuti dai DFA) coincide con la classe dei linguaggi riconosciuti dagli NFA.

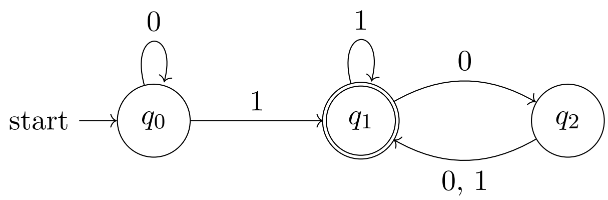
La dimostrazione verrà svolta in due passaggi, trattando separatamente i seguenti due fatti:

1. Per ogni DFA D esiste un NFA N_D tale che $L(N_D) = L(D)$.
2. Per ogni NFA N esiste un DFA D_N tale che $L(D_N) = L(N)$.

Un aspetto importante delle due dimostrazioni che verranno presentate è che sono entrambe *costruttive*: la dimostrazione del fatto 1 mostrerà concretamente come costruire l'NFA N_D dato un DFA D, e viceversa per la dimostrazione del fatto 2.

3 Esempio di conversione da DFA a NFA

Si consideri il DFA rappresentato dal seguente diagramma:



In quanto DFA, esso ha per ogni stato esattamente due transizioni uscenti, una etichettata con 0 e l'altra con 1. Si osserva però che lo stesso diagramma può anche essere interpretato come un NFA, con:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$;
- $\Sigma = \{0, 1\}$;
- stato iniziale q_0;
- $F = \{q_1\}$;
- funzione di transizione $\delta : \{q_0, q_1, q_2\} \times \{0, 1\} \to 2^{\{q_0, q_1, q_2\}}$, definita dalla seguente tabella:

δ	0	1
q_0	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\{q_1\}$
q_2	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$

Si osserva che il valore di δ per ogni coppia stato-simbolo è sempre un insieme singoletto (contenente un unico stato): questa è una funzione di transizione "particolare", ma comunque perfettamente coerente con la definizione degli NFA.

Quella appena presentata in modo informale è l'idea della costruzione di un NFA dato un DFA, ma bisogna sottolineare che il fatto di aver costruito l'NFA a partire dal DFA dato non dimostra in alcun modo che i due riconoscano lo stesso linguaggio.

4 Costruzione di un NFA dato un DFA

Dato un generico DFA $D = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, che per definizione ha $\delta : Q \times \Sigma \to Q$, si costruisce l'NFA $N_D = \langle Q, \Sigma, \delta_N, q_0, F \rangle$, in cui l'insieme degli stati, l'alfabeto, lo stato iniziale e gli stati finali sono gli stessi di D, mentre la funzione δ_N di transizione è definita come:

$$\delta_N : Q \times \Sigma \to 2^Q$$
$$\forall q \in Q,\ a \in \Sigma \quad \delta_N(q, a) = \{\delta(q, a)\}$$

a ogni coppia stato-simbolo, la funzione δ_N associa un insieme contenente un singolo stato, quello associato alla stessa coppia dalla funzione di transizione δ del DFA di partenza.

Ad esempio, se δ è descritta dalla tabella

δ	0	1
$\rightarrow q_0$	q_0	q_1
$*q_1$	q_2	q_1
q_2	q_1	q_1

allora la tabella che descrive la δ_N corrispondente è:

δ_N	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$
$*q_1$	$\{q_2\}$	$\{q_1\}$
q_2	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$

Siccome ogni DFA può essere modellato facilmente come un NFA, si ha di fatto che gli NFA sono un'*estensione* dei DFA.

5 Dimostrazione dell'equivalenza

Una volta definito come costruire un NFA N_D a partire da un DFA D, bisogna dimostrare che N_D riconosce effettivamente lo stesso linguaggio riconosciuto da D. A tale scopo, si dimostra prima un lemma che mette in relazione le computazioni di D e N_D, e poi da questo si dimostra il teorema "vero e proprio":

- *Lemma*: Dato un DFA $D = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$, per ogni $w \in \Sigma^*$ si ha che $\hat{\delta}_N(q_0, w) = \{\hat{\delta}(q_0, q)\}$.
- *Teorema*: Dato un DFA $D = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$, $L(N_D) = L(D)$.

5.1 Dimostrazione del lemma

Si dimostra, per induzione su $|w|$, che $\hat{\delta}_N(q_0, w) = \{\hat{\delta}(q_0, w)\}$ per ogni $w \in \Sigma^*$.

- *Base*: $|w| = 0$, cioè $w = \epsilon$. Per le definizioni delle funzioni di transizione estese, si ha in generale che $\hat{\delta}_N(q_0, \epsilon) = \{q_0\}$ (nel caso degli NFA) e $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = q_0$ (nel caso dei DFA). Dunque, l'asserto del lemma nel caso base è verificato:

$$\hat{\delta}_N(q_0, \epsilon) = \{q_0\} = \{\hat{\delta}(q_0, \epsilon)\}$$

- *Passo induttivo*: $|w| > 0$, cioè $w = xa$, con $x \in \Sigma^*$ e $a \in \Sigma$. Per ipotesi induttiva (IH), si ha che $\hat{\delta}_N(q_0, x) = \{\hat{\delta}(q_0, x)\}$. Allora, ragionando sulla funzione di transizione di N_D:

$$
\begin{aligned}
\hat{\delta}_N(q_0, xa) &= \bigcup_{p \in \hat{\delta}_N(q_0, x)} \delta_N(p, a) && [\text{per definizione di } \hat{\delta}_N] \\
&= \bigcup_{p \in \{\hat{\delta}(q_0, x)\}} \delta_N(p, a) && [\text{per (IH)}] \\
&= \delta_N(\hat{\delta}(q_0, x), a) && [\text{unico termine dell'unione}] \\
&= \{\delta(\hat{\delta}(q_0, x), a)\} && [\text{per definizione di } \delta_N] \\
&= \{\delta(q_0, xa)\} && [\text{per definizione di } \hat{\delta}]
\end{aligned}
$$

Così, anche nel caso $w = xa$, l'asserto del lemma è dimostrato.

5.2 Dimostrazione del teorema

Per dimostrare che $L(N_D) = L(D)$, si fa vedere che, per ogni $w \in \Sigma^*$, $w \in L(D)$ se e solo se $w \in L(N_D)$.

Per iniziare, si assume che valga $w \in L(D)$; per la definizione di stringa accettata da un DFA, ciò è vero se e soltanto se $\hat{\delta}(q_0, w) \in F$:

$$w \in L(D) \iff \hat{\delta}(q_0, w) \in F$$

Si osserva poi che un generico elemento a appartiene a un qualunque insieme Γ, $a \in \Gamma$, se e solo se $\{a\} \cap \Gamma \neq \varnothing$ (in particolare, $\{a\} \cap \Gamma = \{a\}$):

$$\iff \{\hat{\delta}(q_0, w)\} \cap F \neq \varnothing$$

Adesso si applica il lemma dimostrato prima, $\hat{\delta}_N(q_0, w) = \{\hat{\delta}(q_0, w)\}$:

$$\iff \hat{\delta}_N(q_0, w) \cap F \neq \varnothing$$

Questa è esattamente la definizione di stringa accettata da un NFA.

$$\iff w \in L(N_D)$$

Il teorema è quindi dimostrato.