

# Funzioni integrali e primitive

## 1 Funzione integrale

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione integrabile in  $[a, b]$ , e sia  $c \in [a, b]$ . La funzione

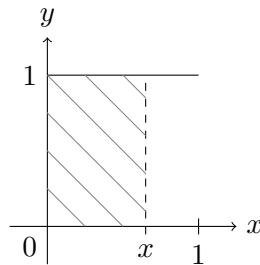
$$F_c(x) = \int_c^x f(t) dt \quad \forall x \in [a, b]$$

si chiama **funzione integrale** di  $f$  (relativa al punto  $c$ ).

### 1.1 Esempio

Si considera la funzione  $f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  nell'intervallo  $[0, 1]$ . La funzione integrale con  $c = 0$  è

$$F_0(x) = \int_0^x 1 dt = x \cdot 1 = x$$



## 2 Teorema fondamentale del calcolo integrale

*Teorema:* Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua (e quindi integrabile), e sia  $c \in [a, b]$ . Allora, data la funzione integrale

$$F_c(x) = \int_c^x f(t) dt$$

si ha che  $F'_c(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$  (cioè, in pratica, le operazioni di integrazione e derivazione sono una l'inversa dell'altra).

*Dimostrazione:* Sia  $x_0 \in (a, b)$ .<sup>1</sup> Si ricava la derivata della funzione integrale  $F_c$  in  $x_0$  mediante il limite del rapporto incrementale:

$$\begin{aligned} F'_c(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F_c(x) - F_c(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_c^x f(t) dt - \int_c^{x_0} f(t) dt}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_c^x f(t) dt + \int_{x_0}^c f(t) dt}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_{x_0}^x f(t) dt}{x - x_0} \end{aligned}$$

Per il teorema della media integrale:

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(k)(x - x_0)}{x - x_0} \quad k \text{ compreso tra } x \text{ e } x_0 \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(k) \end{aligned}$$

Siccome  $k$  è compreso tra  $x$  e  $x_0$ , se  $x \rightarrow x_0$  allora anche  $k \rightarrow x_0$ :

$$= \lim_{k \rightarrow x_0} f(k)$$

$f$  è continua, quindi il limite è

$$= f(x_0) \quad \square$$

### 3 Primitiva

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione derivabile e tale che  $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$ ,<sup>1</sup> allora  $F$  è una **primitiva** di  $f$ .

*Osservazione:* Se  $f$  è continua in  $[a, b]$ , allora, per il teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$F_c(x) = \int_c^x f(t) dt$$

è tale che  $F'_c(x) = f(x)$ , cioè  $F_c$  è una primitiva di  $f$ . In altre parole, tutte le funzioni continue hanno almeno una primitiva: la funzione integrale.

---

<sup>1</sup>Si considera l'intervallo aperto semplicemente per non dover tenere conto dei casi in cui esiste solo la derivata sinistra/destra.

### 3.1 Diverse primitive di una funzione

*Osservazione:* Se  $F(x)$  è una primitiva di  $f(x)$ , lo è anche  $F(x) + c$  (con  $c$  costante), perché

$$(F(x) + c)' = F'(x) + 0 = f(x)$$

Inoltre, si può dimostrare che tutte le primitive di una funzione sono di questo tipo. Di conseguenza, se una funzione ha una primitiva, allora ne ha infinite, che differiscono per una costante additiva.

*Teorema:* Se  $F$  e  $G$  sono due primitive di  $f$ , allora  $G(x) = F(x) + c$ , con  $c$  costante.

*Dimostrazione:* Sia  $H(x) = G(x) - F(x)$ .  $H$  è derivabile (perché lo sono  $F$  e  $G$ ), con

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

Poiché la derivata è 0,  $H(x) = c$  è una funzione costante in  $(a, b)$ , ovvero

$$G(x) - F(x) = c \implies G(x) = F(x) + c \quad \square$$

## 4 Integrale indefinito e definito

L'insieme di tutte le primitive di  $f(x)$  si indica con

$$\int f(x) dx$$

e si chiama **integrale indefinito** di  $f$ .

Invece, l'integrale di Riemann,

$$\int_a^b f(x) dx$$

si dice anche **integrale definito** (per distinguerlo dall'integrale indefinito).

Un integrale indefinito è un insieme di infinite funzioni, mentre un integrale definito è un singolo numero.

## 5 Legame tra integrale indefinito e definito

*Teorema:* Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e sia  $F(x)$  una qualsiasi primitiva di  $f(x)$ . Allora

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

*Osservazioni:*

- Questo teorema fornisce uno strumento per il calcolo dell'integrale definito senza passare dalle somme di Riemann.
- La continuità di  $f$  è una condizione necessaria del teorema perché garantisce che:
  - $f$  sia integrabile secondo Riemann;
  - $f$  ammetta almeno una primitiva.
- Alcuni libri chiamano questo il teorema fondamentale del calcolo integrale, e altri lo chiamano secondo teorema fondamentale del calcolo integrale.

*Dimostrazione:* Sia

$$F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$$

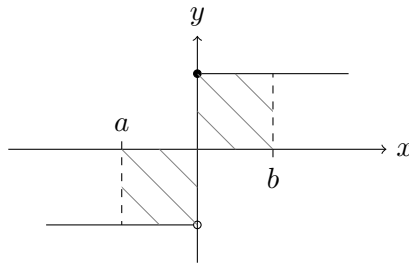
Per il teorema fondamentale del calcolo integrale,  $F_a(x)$  è una primitiva di  $f(x)$ . Inoltre, se  $F(x)$  è una primitiva qualsiasi di  $f(x)$ , allora  $F(x) = F_a(x) + c$ , e quindi:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F_a(b) + c - (F_a(a) + c) \\ &= \int_a^b f(t) dt - \underbrace{\int_a^a f(t) dt}_0 \\ &= \int_a^b f(t) dt \quad \square \end{aligned}$$

## 5.1 Casi in cui non si può applicare il teorema

Esistono funzioni integrabili che non hanno primitive, ed esistono funzioni che hanno primitive e non sono integrabili. Ad esempio:

$$1. f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



è chiaramente integrabile secondo Riemann.

Si suppone che  $F(x)$  sia una primitiva di  $f(x)$  in un intervallo  $(a, b)$  che contenga l'origine. Per definizione,  $F(x)$  dovrebbe essere derivabile (e quindi anche continua) in  $(a, b)$ , ma

$$\left. \begin{aligned} F'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} F'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \\ F'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} F'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nexists F'(0)$$

$$2. f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

ha una primitiva,

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

ma non è limitata, e perciò non è integrabile secondo Riemann.

## 6 Tabella delle primitive

Funzione integranda	Primitive
$k$	$kx + c$
$x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$e^x$	$e^x + c$
$\frac{1}{x}$	$\log x  + c$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + c$

## 7 Integrazione per parti

Siano  $f$  e  $g$  due funzioni derivabili.

$$\begin{aligned}(f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ \int (f(x)g(x))' dx &= \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx \\ f(x)g(x) &= \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx \\ \boxed{\int f'(x)g(x) dx} &= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx\end{aligned}$$

è la regola di **integrazione per parti**: un possibile modo di risolvere l'integrale del prodotto di due funzioni.

Nell'applicarla, bisogna scegliere come suddividere il prodotto da integrare nelle due funzioni  $f'(x)$  e  $g(x)$ :

- $f'(x)$  deve essere una funzione di cui si conosce una primitiva;
- conviene scegliere come  $f'(x)$  una funzione con una primitiva semplice, e come  $g(x)$  una funzione con derivata semplice, in modo da semplificare il calcolo dell'integrale  $\int f(x)g'(x) dx$ .

Questa regola vale anche per l'integrale definito:

$$\int_a^b f'(x)g(x) \, dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx$$

dove  $[f(x)g(x)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$ .

## 7.1 Esempi

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{f'} \underbrace{e^x}_g \, dx &= xe^x - \int e^x \cdot 1 \, dx \\ &= xe^x - e^x + c \\ &= (x-1)e^x + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{f'} \underbrace{\log x}_g \, dx &= \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{2} \int x \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + c \\ &= \frac{x^2}{2} \left( \log x - \frac{1}{2} \right) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x^2}_g \underbrace{e^x}_{f'} \, dx &= x^2 e^x - \int \underbrace{e^x}_{f'} \cdot \underbrace{2x}_g \, dx \\ &= x^2 e^x - \left( 2xe^x - \int 2e^x \, dx \right) \\ &= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c \\ &= e^x(x^2 - 2x + 2) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \log x \, dx &= \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'} \cdot \underbrace{\log x}_{g} \, dx \\
&= x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\
&= x \log x - \int 1 \, dx \\
&= x \log x - x + c \\
&= x(\log x - 1) + c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{e}}^e |\log x| \, dx &= \int_{\frac{1}{e}}^1 |\log x| \, dx + \int_1^e |\log x| \, dx \\
&= -\int_{\frac{1}{e}}^1 \log x \, dx + \int_1^e \log x \, dx \\
&= -[x(\log x - 1)]_{\frac{1}{e}}^1 + [x(\log x - 1)]_1^e \\
&= -1(\log 1 - 1) + \frac{1}{e} \left( \log \frac{1}{e} - 1 \right) + e(\log e - 1) - 1(\log 1 - 1) \\
&= -1(0 - 1) + \frac{1}{e}(-1 - 1) + e(1 - 1) - 1(0 - 1) \\
&= 1 - \frac{2}{e} + 1 \\
&= 2 - \frac{2}{e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^x \cos x}{f' g} \, dx &= e^x \cos x + \int \frac{e^x \sin x}{f' g} \, dx \\
&= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \\
\implies \int e^x \cos x \, dx &= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \\
2 \int e^x \cos x \, dx &= e^x (\cos x + \sin x) \\
\int e^x \cos x \, dx &= \frac{e^x}{2} (\cos x + \sin x) + c
\end{aligned}$$



*Osservazione:* In quest'ultimo esempio, applicando più volte la regola di integrazione per parti, non si arriva mai a un integrale risolvibile immediatamente. Eventualmente, però, si ottiene di nuovo l'integrale di partenza, e lo si può quindi trattare come l'incognita di un'equazione per trovare la soluzione. Con questo metodo si calcolano tutti gli integrali del tipo:

- $\int \sin(\alpha x) \cos(\beta x) dx$ , se  $|\alpha| \neq |\beta|$

- $\int e^{\alpha x} \sin(\beta x) dx$

- $\int e^{\alpha x} \cos(\beta x) dx$

- $\int \sin(\alpha x) \sin(\beta x) dx$

- $\int \cos(\alpha x) \cos(\beta x) dx$