Azzolini Riccardo 2020-03-25

# Equivalenza logica

## 1 Equivalenza logica

*Definizione*: Due formule $A$ e $B$ sono **logicamente equivalenti** se, per ogni valutazione $v$, si ha $v(A) = v(B)$.

Si scrive $A \equiv B$ per indicare che $A$ e $B$ sono logicamente equivalenti, e $A \not\equiv B$ se invece non lo sono.

*Osservazioni*:

- $A \not\equiv B$ significa che $\widetilde{\exists} v\colon v(A) \neq v(B)$.
- $\equiv$ è una relazione di equivalenza, ovvero è:
  - *riflessiva*: $A \equiv A$;
  - *simmetrica*: $A \equiv B$ implica $B \equiv A$;
  - *transitiva*: $A \equiv B$ e $B \equiv C$ implica $A \equiv C$.
- $A \equiv B$ se e solo se $\neg A \equiv \neg B$:

$$\begin{aligned} A \equiv B \text{ sse } & \widetilde{\forall} v\colon v(A) = v(B) \\ \text{sse } & \widetilde{\forall} v\colon v(\neg A) = v(\neg B) \\ \text{sse } & \neg A \equiv \neg B \end{aligned}$$

### 1.1 Tavole di verità

Operativamente, per verificare se due formule sono logicamente equivalenti, si può usare il metodo delle tavole di verità. Infatti, due formule logicamente equivalenti hanno la stessa tavola di verità (purché si consideri lo stesso ordine di valutazione delle variabili, cioè lo stesso ordine delle righe).

Ad esempio, $\neg(A \lor B) = \neg A \land \neg B$, quindi:

| $A$ | $B$ | $A \lor B$ | $\neg(A \lor B)$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $\neg A \land \neg B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | **1** | 1 | 1 | **1** |
| 0 | 1 | 1 | **0** | 1 | 0 | **0** |
| 1 | 0 | 1 | **0** | 0 | 1 | **0** |
| 1 | 1 | 1 | **0** | 0 | 0 | **0** |

## 2 Proprietà dei connettivi

- I connettivi di congiunzione e disgiunzione sono **commutativi**:

$$A \wedge B \equiv B \wedge A$$
$$A \vee B \equiv B \vee A$$

- Congiunzione e disgiunzione sono **associativi**:

$$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$$
$$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$$

  Si possono allora scrivere congiunzioni e disgiunzioni di più di due formule senza usare le parentesi:

  - $A \wedge B \wedge C$ indica $(A \wedge B) \wedge C$, o, equivalentemente, $A \wedge (B \wedge C)$;
  - $A \vee B \vee C$ indica $(A \vee B) \vee C$, o, equivalentemente, $A \vee (B \vee C)$.

- L'implicazione *non è commutativa*:

$$A \to B \not\equiv B \to A$$

- L'implicazione *non è associativa*:

$$A \to (B \to C) \not\equiv (A \to B) \to C$$

- La **contronominale** di $A \to B$ è $\neg B \to \neg A$:

$$A \to B \equiv \neg B \to \neg A$$

  Quest'equivalenza, che riguarda il linguaggio della logica proposizionale classica, è comunemente utilizzata nel ragionamento, e quindi nel metalinguaggio in cui si dimostrano le proprietà del sistema logico (formale) studiato: se si vuole dimostrare che da $A$ segue $B$, si può provare a mostrare che dalla negazione di $B$ è possibile concludere la negazione di $A$.

  In generale, gli schemi di ragionamento usati nel metalinguaggio possono essere gli stessi che si descrivono nel sistema formale.

- Un'altra importante equivalenza logica che riguarda l'implicazione è

$$A \to B \equiv \neg A \vee B$$

  Infatti:

| $A$ | $B$ | $A \to B$ | $\neg A \lor B$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

In pratica, quest'equivalenza esplicita la lettura dell'implicazione classica come implicazione filoniana o materiale. Essa corrisponde infatti alla definizione dell'implicazione data nel metalinguaggio, che afferma che $v(A \to B) = 1$ se e solo se $v(A) = 0$ o $v(B) = 1$.

- **Doppia negazione**:
$$\neg\neg A \equiv A$$

- **Leggi di De Morgan**:
$$\neg(A \lor B) \equiv \neg A \land \neg B$$
$$\neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B$$
da cui si deduce anche che
$$A \land B \equiv \neg(\neg A \lor \neg B)$$
$$A \lor B \equiv \neg(\neg A \land \neg B)$$
cioè che la congiunzione può essere riscritta in termini di negazione e disgiunzione, e, viceversa, la disgiunzione può essere riscritta in termini di negazione e congiunzione. È allora possibile scrivere tutte le formule usando solo uno dei due connettivi $\land, \lor$.

- **Assorbimento**:
$$A \lor (A \land B) \equiv A$$
$$A \land (A \lor B) \equiv A$$

- **Leggi distributive**: vale la distributività di $\land$ rispetto a $\lor$, e anche il viceversa.
$$A \land (B \lor C) \equiv (A \land B) \lor (A \land C)$$
$$A \lor (B \land C) \equiv (A \lor B) \land (A \lor C)$$
Queste equivalenze possono essere generalizzate al caso di più formule. Per esempio:
$$(A_1 \land A_2) \lor (B_1 \land B_2) \equiv (A_1 \lor B_1) \land (A_1 \lor B_2) \land (A_2 \lor B_1) \land (A_2 \lor B_2)$$
$$(A_1 \lor A_2) \land (B_1 \lor B_2) \equiv (A_1 \land B_1) \lor (A_1 \land B_2) \lor (A_2 \land B_1) \lor (A_2 \land B_2)$$

### 2.1 Esempio di dimostrazione senza tavole di verità

Per dimostrare $A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$ senza sfruttare le tavole di verità, si considera innanzitutto la seconda legge di De Morgan:

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$$

Come visto in precedenza, $H \equiv K$ se e solo se $\neg H \equiv \neg K$, quindi si può dedurre:

$$\neg\neg(A \wedge B) \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$$

Poi, applicando la proprietà della doppia negazione,

$$\neg\neg(A \wedge B) \equiv A \wedge B$$

la simmetria della relazione di equivalenza,

$$A \wedge B \equiv \neg\neg(A \wedge B)$$

e infine la transitività tra $A \wedge B \equiv \neg\neg(A \wedge B)$ e $\neg\neg(A \wedge B) \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$, si deduce che

$$A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$$

## 3 Costante vero e nuovi connettivi

L'equivalenza logica può anche essere usata per definire una costante "vero", e dei nuovi connettivi:

- Si definisce la **costante "vero"** come il simbolo $\top$, tale che:

  $$\top \equiv p \vee \neg p \qquad \text{per una qualche } p \in VAR$$

  perché $p \vee \neg p$ è una tautologia (vera per qualunque valutazione).
- Si definisce il connettivo $\leftrightarrow$ (**bi-implicazione**, se e solo se) come:

  $$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$$

In questo modo, si possono usare $\top$ e $\leftrightarrow$ come "abbreviazioni" delle formule loro equivalenti. Ad esempio, $A \leftrightarrow (\top \vee B)$ è un'abbreviazione per

$$\big(A \to ((p \vee \neg p) \vee B)\big) \wedge \big(((p \vee \neg p) \vee B) \to A\big)$$