Azzolini Riccardo 2019-03-26

Serie a termini di segno variabile

1 Convergenza assoluta e semplice

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie qualsiasi.

- Se $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge, si dice che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è **assolutamente convergente**.
- Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, si dice che è **semplicemente convergente** (per distinguerla dalla convergenza assoluta).

Osservazione: Se una serie è a termini positivi, i due tipi di convergenza coincidono.

Teorema: Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge assolutamente, allora converge anche semplicemente e

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right| \le \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$$

Osservazione: Il viceversa non è vero, cioè esistono serie che divergono assolutamente ma convergono semplicemente.

1.1 Esempio

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

non è una serie a termini positivi, neanche definitivamente.

Per valutare la convergenza assoluta, si studia la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\sin n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$$

$$|\sin n| \le 1 \implies \frac{|\sin n|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$$

Siccome $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ è la serie armonica generalizzata con $\alpha = 2 > 1$, che converge, per il criterio del confronto la serie studiata converge assolutamente, e quindi anche semplicemente.

2 Serie a segni alterni

Una serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots$$

con $a_k \geq 0$ (o $a_k \leq 0$) definitivamente per $k \to +\infty$ si dice **a segni alterni**.

2.1 Esempi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{k+2}{k^2+3k-3}$$

è a segni alterni perché $\dfrac{k+2}{k^2+3k-3} > 0$ definitivamente.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \sin k$$

non è a segni alterni perché $\sin k$ non è definitivamente ≥ 0 o ≤ 0.

3 Criterio di Leibniz

Sia $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k$ una serie a segni alterni. Se

1. $\lim\limits_{k \to +\infty} a_k = 0$
2. $a_{k+1} \leq a_k \quad \forall k$ (o almeno definitivamente per $k \to +\infty$), cioè la successione $\{a_k\}$ è (definitivamente) decrescente

allora la serie converge.

Inoltre, se $\{s_n\}$ è la successione delle somme parziali e S è la somma della serie, si ha

- $s_{2n} \geq S$;

- $s_{2n+1} \leq S$;
- $|S - s_n| = |\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k| \leq a_{n+1}$, ovvero la somma di tutti i termini da $n+1$ in poi ha valore assoluto minore di quello del termine $n+1$.

Osservazione: Analogamente agli altri criteri di convergenza, il criterio di Leibniz è solo una condizione sufficiente, e non necessaria, per la convergenza di una serie a segni alterni.

Dimostrazione: Nella successione delle somme parziali, per l'ipotesi 2, si ha

$$
\begin{aligned}
s_0 &= a_0 \\
s_1 &= a_0 - a_1 \leq s_0 \\
s_2 &= \begin{cases} \overbrace{a_0 - a_1}^{s_1} + \overbrace{a_2}^{\geq 0} \geq s_1 \\ \underbrace{a_0}_{s_0} - \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\geq 0} \leq s_0 \end{cases} \\
s_3 &= \begin{cases} \overbrace{a_0 - a_1 + a_2}^{s_2} - \overbrace{a_3}^{\geq 0} \leq s_2 \\ \underbrace{a_0 - a_1}_{s_1} + \underbrace{a_2 - a_3}_{\geq 0} \geq s_1 \end{cases} \\
s_4 &= \begin{cases} s_3 + a_4 \geq s_3 \\ s_2 - (a_3 - a_4) \leq s_2 \end{cases} \\
s_5 &= \begin{cases} s_4 - a_5 \leq s_4 \\ s_3 + a_4 - a_5 \geq s_3 \end{cases}
\end{aligned}
$$

e così via, quindi

$$\underbrace{s_1 \leq s_3 \leq s_5}_{\{s_{2n+1}\} \text{ cresce}} \leq \cdots \leq \underbrace{s_4 \leq s_2 \leq s_0}_{\{s_{2n}\} \text{ decresce}}$$

cioè le due sottosuccessioni $\{s_{2n+1}\}$ e $\{s_{2n}\}$ sono monotone e limitate (dato che tutti i termini sono compresi tra s_1 e s_0), e di conseguenza convergono. Siano allora

$$S = \lim_{n \to +\infty} s_{2n+1} \qquad S' = \lim_{n \to +\infty} s_{2n}$$

Per l'ipotesi 1, la differenza $S - S'$ è 0:

$$
\begin{aligned}
S - S' &= \lim_{n\to+\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to+\infty} s_{2n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) \\
&= \lim_{n\to+\infty} (-a_{2n+1}) = 0
\end{aligned}
$$

Ciò implica che le due sottosuccessioni $\{s_{2n+1}\}$ e $\{s_{2n}\}$ hanno lo stesso limite $S = S'$, e (siccome sono una il complemento dell'altra) la serie converge.

Inoltre, per il teorema sul limite delle successioni monotone,

$$
S = \sup\{s_{2n+1}\} = \inf\{s_{2n}\} \implies s_{2n+1} \leq S \leq s_{2n} \qquad \square
$$

4 Esempio di serie che converge semplicemente ma non assolutamente

$$
\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}
$$

è una serie a segni alterni.

- Convergenza assoluta:

$$
\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}
$$

  è la serie armonica, che diverge, quindi la serie studiata diverge assolutamente.

- Criterio di Leibniz:

$$
\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0
$$

$$
a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} = a_n \quad \forall n
$$

  Siccome tutte le ipotesi sono soddisfatte, la serie converge (semplicemente).

Lo stesso accade per tutte le serie del tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^\alpha} \quad 0 < \alpha \leq 1$$